Jurnal UJMC, Volume 4, Nomor 1, Hal. 39 - 48
pISSN : 2460-3333 eISSN : 2579-907X

Keterhubungan Pelangi Kuat (src) pada Graf $\left(1\ Spl - (C_n)\right)$ untuk $3 \leq n \leq 10$

Ermita Rizki Albirri[1], Robiatul Adawiyah[2], Lela Nur Safrida[3], Reza Ambarwati[4]

[1]Universitas Jember, ermitara@unej.ac.id
[2]Universitas Jember[2], robiatul@unej.ac.id
[3]Universitas Jember[3], lelanurs@unej.ac.id
[4]Universitas Jember, reza.ambarwati@unej.ac.id

Abstract. Let G be nontrivial and connected graph. A total-coloured path is called as total-rainbow if its edges and internal vertices have distinct colours. For any two vertices u and v of G, a rainbow $u - v$ geodesic in G is a rainbow $u - v$ path of length $d(u, v)$, where $d(u, v)$ is the distance between u and v. The graph G is strongly rainbow connected if there exists a rainbow $u - v$ geodesic for any two vertices u and v in G. The strong rainbow connection number of G, denoted $src(G)$, is the minimum number of colors that are needed in order to make G strong rainbow connected. The result shows for $1\ Spl - (C_n)$ and $3 \leq n \leq 10$ there exist a coloring where $diam(G) = rc(G) = src(G) \leq m$ and $diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m$ with m is the number of path in $1\ Spl - (C_n)$.

Keywords: *strong rainbow connection number, split graph,* $1\ Spl - (C_n)$ *graph for* $3 \leq n \leq 10$

Abstrak. Misalkan G suatu graf nontrivial dan terhubung. Suatu pewarnaan busur pada graf G disebut pelangi (*rainbow)* jika terdapat lintasan pelangi (*rainbow)* yaitu lintasan yang pewarnaannya pada setiap busur bertetangga berbeda. Jika pewarnaan busur $c: E(G) \to \{1,2, \dots, k\}, k \in$ N, membuat lintasan (*path*) yang menghubungkan dua simpul di graf G adalah lintasan pelangi (*lintasan pelangi)* maka banyak warna minimal k yang digunakan disebut sebagai bilangan keterhubungan pelangi (*rainbow connection number),* ditulis sebagai $rc(G)$. Jika pewarnaannya adalah pewarnaan geodesic pelangi (*rainbow geodesic)*, yaitu setiap simpul u dan v terhubung dengan lintasan pelangi dengan panjang $d(u, v)$, maka banyak warna minimal yang digunakan disebut sebagai bilangan keterhubungan pelangi (*strong rainbow connection number*), dan ditulis sebagai $src(G)$. Penelitian ini membahas $src(G)$ pada graf $1\ Spl - (C_n)$. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa pada graf $1\ Spl - (C_n)$ untuk $3 \leq n \leq 10$ terdapat pewarnaan dimana $diam(G) = rc(G) = src(G) \leq m$ dan $diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m$ dengan m adalah jumlah busur pada graf $1\ Spl - (C_n)$.

Kata kunci: *strong rainbow connection number*, graf split, graf $1\ Spl - (C_n)$ untuk $3 \leq n \leq 10$

1 Pendahuluan

Misalkan G suatu graf nontrivial dan terhubung yang didefinisikan memiliki pewarnaan busur sebagai berikut $c: E(G) \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}, k \in$ N. Jika c membuat lintasan *(path)* yang menghubungkan dua simpul di Graf G adalah lintasan pelangi (*lintasan pelangi).* Chartrand dkk (2008) [1], mendefinisikan bahwa graf G yang memiliki lintasan pelangi *(lintasan pelangi)* yang diwarnai dengan minimal k warna disebut bilangan keterhubungan pelangi *(rainbow connection number* (rc)*).* Lintasan geodesic pelangi adalah lintasan terpendek pada suatu graf G yang memiliki pewarnaan pelangi. Apabila graf G memiliki lintasan geodesic pelangi maka disebut bilangan keterhubungan pelangi kuat *(strong rainbow connection number* (src)*)* karena pewarnaan ini lebih kuat daripada hanya terdapat lintasan pelangi saja dalam graf G.

S.K. Vaidya dkk [3], mendefinisikan graf split secara umum adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan beberapa simpul v baru yaitu v' yang bertetangga dengan setiap simpul v di G. Graf *split-cycle* $(1\, Spl - (C_n))$ adalah graf lengkap berupa graf lingkaran sekaligus graf split dengan graf di luarnya yang memiliki simpul-simpul yang sama sejajar dengan graf lingkaran seperti pada Gambar 1. Graf *split-cycle* $(1\, Spl - (C_n))$ memiliki himpunan simpul dalam $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ yang diperoleh dengan menambahkan sebanyak 1 simpul baru $v_{i,1}$ dengan i adalah banyak simpul pada C_n, sedemikian hingga masing-masing simpul pada $v_{i,1}$ bertetangga dengan setiap simpul pada v_i di C_n atau bisa dikatakan bahwa himpunan simpul $\{v_{1,1}, v_{1,2}, \ldots, v_{1,n}\}$ adalah himpunan simpul luar. Sehingga terdapat 3 jenis busur pada graf ini yaitu busur $v_i v_{i+1}$, busur $v_{i-1} v_{i,1}$, dan busur $v_{i+1} v_{i,1}$ untuk $i = 1,2,\ldots,n$. Untuk busur $v_i v_{i+1}$ adalah himpunan busur $\{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_nv_1 = v_iv_{i+1}\}$. Kemudian busur $v_{i-1}v_i$ adalah himpunan busur $\{v_1v_{2,1}, v_2v_{3,1}, \ldots, v_{n-1}v_{n,1}, v_nv_{1,1} = v_{i-1}v_{i,1}\}$, dan untuk busur $v_{i+1}v_{i,1}$ adalah himpunan busur $\{v_2v_{1,1}, v_3v_{2,1}, \ldots, v_nv_{n-1,1}, v_1v_{n,1} = v_{i+1}v_{i,1}\}$ [2]. Berdasarkan teori rainbow connection number diketahui bahwa $diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m$ dengan $diam$ adalah diameter pada graf atau lintasan terpanjang yang bisa dibuat pada graf dan m adalah jumlah semua busur pada graf G.

2 Hasil Pewarnaan

Teorema 1. Untuk setiap bilangan bulat $3 \leq n \leq 10$,

$$src\big(1\, Spl - (C_n)\big) = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{n+3}{2} \right\rfloor, n = 0{,}3 mod 4; 3 \leq n \leq 9 \\ \dfrac{n+1}{2}, n = 1 mod 4;\ n = 5{,}9 \\ \dfrac{n+2}{2}, n = 2 mod 4; n = 6{,}10 \end{cases}$$

Bukti:

- Kasus 1: untuk $n \in \{3,4,5\}$

Pada kasus ini, bisa dikatakan untuk $n \neq 2mod4$ memiliki bilangan keterhubungan pelangi kuat (src) yang sama yaitu 3 (walaupun rumus (src) nya berbeda). Pembuktian $src\big(1\ Spl-(C_n)\big)=3, untuk\ n \in \{3,4,5\}$ mengikuti pembuktian $rc\big(1\ Spl-(C_n)\big)=3, untuk\ n \in \{3,4,5\}$ akibat hal-hal berikut:

a. $src\big(1\ Spl-(C_n)\big) \geq rc\big(1\ Spl-(C_n)\big) \geq diam\big(1\ Spl-(C_n)\big)=3$
b. Berdasarkan konstruksinya, ditemukan lintasan yang merupakan geodesic rainbow yaitu:

1. Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar
   Bukti: misalkan $u=v_i$ dan $t=v_{j,1}$. Maka lintasan berikut pasti geodesic rainbow:
   - $u-t: v_i-v_{i+1}-v_{j,1}$ untuk $j=i+2$ dan $j=i+3$
   - $u-t: v_i-v_{i+1}-v_{j,1}$ untuk $j=i$
2. Apabila simpul u,t merupakan simpul luar
   Bukti: misalkan $u=v_{j,1}$ dan $t=v_{k,1}$. Maka lintasan berikut pasti rainbow:
   - $u-t: v_{j,1}-v_{i+1}-v_i-v_{k,1}$ untuk $j=i$ dan $k=i+1$
   - $u-t: v_{j,1}-v_{k,1}$ untuk $j=i$ dan $k=i+1$
3. Apabila simpul u,t merupakan simpul dalam
   Bukti: misalkan $u=v_i$ dan $t=v_l$. Maka lintasan berikut pasti rainbow:
   - $u-t: v_i-v_l$ untuk $l=i+1$

Jadi terbukti bahwa untuk $src\big(1\ Spl-(C_n)\big)=\frac{n+3}{2}$ untuk $3 \leq n \leq 5$.

♦ Kasus 2: $untuk\ n=6$

Misalkan untuk $n=6$ maka $src\big(1\ Spl-(C_n)\big)=4$. Didefinisikan $c: E\big(1\ Spl-(C_n)\big) \to \{1,2,3,4\}$ dengan $c(e_i)$ sebagai berikut: $c(v_iv_{i+1})=1$ untuk i ganjil, $c(v_iv_{i+1})=2$ untuk i genap, $c\big(v_{i-1}v_{i,1}\big)=3$ dan $c\big(v_{i,1}v_{i+1}\big)=4$. Sehingga $src\big(1\ Spl-(C_n)\big) \leq 4$. Kemudian akan ditunjukkan $src\big(1\ Spl-(C_n)\big) \geq 4$. Karena $src\big(1\ Spl-(C_n)\big) \geq rc\big(1\ Spl-(C_n)\big) \geq diam\big(1\ Spl-(C_n)\big)=3$ untuk $n=6$, maka $src\big(1\ Spl-(C_n)\big) \geq 3$. Asumsikan $src\big(1\ Spl-(C_n)\big)=3$. Misalkan c' adalah pewarnaan 3-rainbow.

- Kasus 2.1. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c'\big(v_{i-1}v_{i,1}\big) \neq c'\big(v_{i+1}v_{i,1}\big)$, $c'\big(v_{i-1}v_{i,1}\big)=1$ dan $c'\big(v_{i+1}v_{i,1}\big)=2$ untuk $1 \leq i \leq n$ dengan $n=6$. Selanjutnya akan dilihat lintasan-lintasan sebagai berikut:
  - Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar. Misalkan $u=v_i$ dan $t=v_{j,1}$.
    - Kemudian akan dilihat lintasan $u-t: v_1-v_{3,1}$. Karena $c'\big(v_{i-1}v_{i,1}\big)=1$ dan $c'\big(v_{i+1}v_{i,1}\big)=2$, maka hal ini memaksakan $c^{'}(v_1v_2)=3$. Hal ini juga berlaku untuk $c^{'}(v_iv_{i+1})=3$. Sehingga $v_1-v_{3,1}$ menjadi geodesic rainbow.
    - Selanjutnya akan dilihat lintasan $u-t: v_1-v_{4,1}$. Karena $c^{'}(v_iv_{i+1})=3$, maka mengakibatkan $v_1-v_{4,1}$ tidak menjadi geodesic rainbow.

    Maka hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.
  - Apabila simpul u,t merupakan simpul luar. Misalkan $u=v_{j,1}$ dan $t=v_{k,1}$. Maka karena $c^{'}(v_1v_2)=3$ lintasan-lintasan di bawah ini:

  - $u - t: v_{1,1} - v_2 - v_1 - v_{3,1}$ adalah geodesic rainbow.
  - Selanjutnya akan dilihat lintasan $u - t: v_{1,1} - v_2 - v_3 - v_{4,1}$. Sehingga, karena $c^{'}(v_1v_2) = 3$, maka lintasan tersebut geodesic rainbow. Terbukti.
- Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$.
  - Akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_3$. Maka akan menjadi geodesic rainbow jika $u - t: v_1 - v_{2,1} - v_3$.
  - Akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_4$. Maka akan menjadi geodesic rainbow jika $u - t: v_1 - v_2 - v_{3,1} - v_4$. Terbukti.

Karena tidak semua asumsi awal itu terbukti benar, maka hal ini dianggap kontradiksi dengan asumsi awal.

- Kasus 2.2. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c'(v_{i-1}v_{i,1}) = c'(v_{i+1}v_{i,1}) = 1$ untuk $\leq i \leq n$ dengan $n = 6$. Oleh karena itu, hal ini memaksakan $s^{'}(v_iv_{i+1}) = 2$ untuk $1 \leq i \leq 6; i\ ganjil$ dan $s^{'}(v_iv_{i+1}) = 3$ untuk $1 \leq i \leq 6; i\ genap$. Selanjutnya akan dilihat lintasan berikut:
  - Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_{j,1}$.
    - Kemudian akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{3,1}$. Berdasarkan asumsi di atas, lintasannya menjadi $v_1 - v_2 - v_{3,1}$. Sehingga $v_1 - v_{3,1}$ menjadi geodesic rainbow.
    - Selanjutnya akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{4,1}$. Karena didapatkan lintasan $v_1 - v_2 - v_3 - v_{4,1}$ maka mengakibatkan $v_1 - v_{4,1}$ menjadi geodesic rainbow. Terbukti.
  - Apabila simpul u, t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_{j,1}$ dan $t = v_{k,1}$.
    - Akan dilihat lintasan $u - t: v_{1,1} - v_2 - v_1 - v_{3,1}$. Sehingga, karena $c'(v_{i-1}v_{i,1}) = c'(v_{i+1}v_{i,1}) = 1$, maka tidak ada geodesic rainbow.
    - Akan dilihat lintasan $u - t: v_{1,1} - v_2 - v_3 - v_{4,1}$. Sehingga, karena $c'(v_{i-1}v_{i,1}) = c'(v_{i+1}v_{i,1}) = 1$, maka lintasan tersebut bukan geodesic rainbow.

Hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.

- Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$.
  - Akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_3$. Maka akan menjadi geodesic rainbow jika $u - t: v_1 - v_{2,1} - v_3$.
  - Akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_4$. Maka jika $u - t: v_1 - v_2 - v_{3,1} - v_4$ ataupun $u - t: v_1 - v_2 - v_3 - v_4$ tidak menjadi geodesic rainbow. Hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.

Karena tidak semua asumsi awal itu terbukti benar, maka hal ini dianggap kontradiksi dengan asumsi awal.Dengan demikian $src(1\, Spl - (C_n)) \geq 4$. Karena berdasarkan konstruksi pewarnaan diperoleh $src(1\, Spl - (C_n)) \leq 4$, maka $src(1\, Spl - (C_n)) = 4$ untuk $n = 6$.

- Kasus 3: $untuk\ n \in \{7,8,9\}$

Pada pembuktian ini, untuk $n \neq 2mod4$ memiliki bilangan keterhubungan pelangi kuat (src) yang sama yaitu 5 (walaupun rumus (src) nya berbeda). Misalkan $src(G) = 5$ untuk $n \in \{7,8,9\}$. Definisikan sebagai $c(e_i)$ suatu pewarnaan $c: E\left(1\,Spl - (C_n)\right) \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$ dengan $s(v_i v_{i+1}) = i(mod\ 3)$. Selanjutnya untuk $c\left(v_{i-1}v_{i,1}\right) = 4$ dan $c\left(v_{i+1}v_{i,1}\right) = 5$.

- Kasus 3.1. Untuk $n = 7$. Karena $diam\left(1\,Spl - (C_n)\right) = 3$, maka $3 \leq rc\left(1\,Spl - (C_n)\right) \leq src\left(1\,Spl - (C_n)\right) \leq 5$. Sehingga untuk menunjukkan $src(1\,Spl - (C_n)) \geq 5$, cukup dibuktikan $src\left(1\,Spl - (C_n)\right) \neq 4$. Maka diasumsikan $src(G) = 4$. Misalkan c' adalah pewarnaan 4-rainbow.
- Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c'\left(v_{i-1}v_{i,1}\right) \neq c'\left(v_{i+1}v_{i,1}\right)$.

Misalkan $c'\left(v_{i-1}v_{i,1}\right) = 1$ dan $c'\left(v_{i+1}v_{i,1}\right) = 2$ untuk $1 \leq i \leq n$ dengan $n = 7$. Selanjutnya akan dilihat lintasan-lintasan sebagai berikut:

- Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_{j,1}$.
  - Kemudian akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{5,1}$. Maka hal ini memaksakan $c'(v_1 v_2) = 3; c'(v_2 v_3) = 4$. Begitu pula untuk pewarnaan busur-busur pada subgraf C_7 selanjutnya melingkar searah jarum jam. Sehingga $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_{5,1}$ tidak menjadi geodesic rainbow.
  - Selanjutnya akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{4,1}$. Berdasarkan pewarnaan subgraf C_7, maka mengakibatkan $v_1 - v_2 - v_3 - v_{4,1}$ menjadi geodesic rainbow.Maka hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.
- Apabila simpul u, t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_{j,1}$ dan $t = v_{k,1}$. Maka lintasan-lintasan di bawah ini:
  - $u - t$: $v_{1,1} - v_2 - v_3 - v_{4,1}$ adalah geodesic rainbow.
  - $u - t$: $v_{1,1} - v_7 - v_6 - v_{5,1}$ adalah geodesic rainbow. Terbukti.
- Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$. Berdasarkan pewarnaan c',
  - Akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_7 - v_{6,1} - v_5$ menjadi geodesic rainbow.
  - Akan dilihat lintasan $u - t: v_7 - v_3$. Maka akan menjadi geodesic rainbow jika $u - t: v_7 - v_{1,1} - v_2 - v_3$. Terbukti.

Karena tidak semua asumsi awal itu terbukti benar, maka hal ini dianggap kontradiksi dengan asumsi awal.

- Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c'\left(v_{i-1}v_{i,1}\right) = c'\left(v_{i+1}v_{i,1}\right) = 1$.
  Selanjutnya akan dilihat lintasan-lintasan sebagai berikut:
- Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_{j,1}$.
  - Kemudian akan dilihat lintasan $\mathrm{u - t: v_1 - v_{4,1}}$. Maka hal ini memaksakan $\mathrm{c'(v_1 v_2) = 2; c'(v_2 v_3) = 3; c'(v_3 v_4) = 4}$. Begitu pula untuk pewarnaan busur-busur pada subgraf $\mathrm{C_7}$ selanjutnya melingkar searah jarum jam. Sehingga $\mathrm{v_1 - v_2 - v_3 - v_{4,1}}$ menjadi geodesic rainbow.

- Selanjutnya akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{5,1}$. Berdasarkan pewarnaan subgraf C_7, maka mengakibatkan $v_1 - v_7 - v_6 - v_{5,1}$ menjadi geodesic rainbow.Terbukti.

- Apabila simpul u, t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_{j,1}$ dan $t = v_{k,1}$. Maka lintasan-lintasan di bawah ini:
  - $u - t: v_{1,1} - v_2 - v_1 - v_{2,1}$ bukan geodesic rainbow.
  - $u - t: v_{1,1} - v_7 - v_6 - v_{5,1}$ bukan geodesic rainbow. Maka kontradiksi dengan asumsi awal.
- Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$. Berdasarkan pewarnaan c',
  - Akan dilihat lintasan $u - t: v_7 - v_1 - v_2$ ataupun $u - t: v_7 - v_{1,1} - v_2$ bukan geodesic rainbow.
  - Akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_5$. Maka akan menjadi geodesic rainbow jika $u - t: v_1 - v_7 - v_6 - v_5$. Maka kontradiksi dengan asumsi awal.

Karena tidak semua asumsi awal itu terbukti benar, maka hal ini dianggap kontradiksi dengan asumsi awal. Sehingga terbukti bahwa $src(1\,Spl - (C_n)) \geq 5$ untuk $n = 7$.

- Kasus 3.2. Untuk $n = 8$. Karena $diam(1\,Spl - (C_n)) = 4$, maka $4 \leq rc(1\,Spl - (C_n)) \leq src(1\,Spl - (C_n)) \leq 5$. Akan ditunjukkan $src(1\,Spl - (C_n)) \geq 5$. Maka diasumsikan $src(G) = 4$. Misalkan c' adalah pewarnaan 4-rainbow.
  - Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c'(v_{i-1}v_{i,1}) \neq c'(v_{i+1}v_{i,1})$.

  Misalkan $c'(v_{i-1}v_{i,1}) = 1$ dan $c'(v_{i+1}v_{i,1}) = 2$ untuk $1 \leq i \leq n$ dengan $n = 8$. Selanjutnya akan dilihat lintasan-lintasan sebagai berikut:
- Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_{j,1}$.
  - Kemudian akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{5,1}$. Maka hal ini memaksakan $c'(v_1v_2) = 3; c'(v_2v_3) = 4$. Begitu pula untuk pewarnaan busur-busur pada subgraf C_8 selanjutnya melingkar searah jarum jam. Sehingga $v_1 - v_2 - v_3 - v_{4,1} - v_5 - v_4 - v_{5,1}$ tidak menjadi geodesic rainbow.
  - Selanjutnya akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_{4,1}$. Berdasarkan pewarnaan subgraf C_7, maka mengakibatkan $v_1 - v_2 - v_3 - v_{4,1}$ menjadi geodesic rainbow. Maka hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.
- Apabila simpul u, t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_{j,1}$ dan $t = v_{k,1}$. Maka lintasan-lintasan di bawah ini:
  - $u - t: v_{1,1} - v_2 - v_3 - v_{4,1}$ adalah geodesic rainbow.
  - $u - t: v_{1,1} - v_7 - v_6 - v_{5,1}$ adalah geodesic rainbow. Terbukti.
- Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$. Berdasarkan pewarnaan s',
  - Akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_8 - v_7 - v_{6,1} - v_5$ menjadi geodesic rainbow.
  - Akan dilihat lintasan $u - t: v_1 - v_4$. Maka akan menjadi geodesic rainbow jika $u - t: v_1 - v_2 - v_{3,1} - v_4$. Terbukti.

Karena tidak semua asumsi awal itu terbukti benar, maka hal ini dianggap kontradiksi dengan asumsi awal.

- Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c'(v_{i-1}v_{i,1}) = c'(v_{i+1}v_{i,1}) = 1$.

Selanjutnya akan dilihat lintasan-lintasan sebagai berikut:

- Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_{j,1}$.
  - Kemudian akan dilihat lintasan $\mathrm{u-t: v_1 - v_{4,1}}$. Maka hal ini memaksakan $\mathrm{c'(v_1v_2) = 2; c'(v_2v_3) = 3; c'(v_3v_4) = 4}$. Begitu pula untuk pewarnaan busur-busur pada subgraf $\mathrm{C_8}$ selanjutnya melingkar searah jarum jam. Sehingga $\mathrm{v_1 - v_2 - v_3 - v_{4,1}}$ menjadi geodesic rainbow.
  - Selanjutnya akan dilihat lintasan $\mathrm{u - t: v_1 - v_{5,1}}$. Berdasarkan pewarnaan subgraf $\mathrm{C_8}$, maka mengakibatkan $\mathrm{v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_{5,1}}$ tidak menjadi geodesic rainbow. Maka kontradiksi.
- Apabila simpul u, t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_{j,1}$ dan $t = v_{k,1}$. Maka lintasan-lintasan di bawah ini:
  - $\mathrm{u - t: v_{1,1} - v_2 - v_1 - v_{2,1}}$ bukan geodesic rainbow.
  - $\mathrm{u - t: v_{1,1} - v_8 - v_7 - v_{6,1}}$ bukan geodesic rainbow.

Maka kontradiksi dengan asumsi awal.

- Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$. Berdasarkan pewarnaan $\mathrm{c'}$,
  - Akan dilihat lintasan $\mathrm{u - t: v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5}$ ataupun $\mathrm{u - t: v_1 - v_8 - v_7 - v_6 - v_5}$ bukan geodesic rainbow.
  - Akan dilihat lintasan $\mathrm{u - t: v_7 - v_3}$. Maka bukan geodesic rainbow pada $\mathrm{u - t: v_7 - v_8 - v_1 - v_2 - v_3}$. Maka kontradiksi dengan asumsi awal.

Karena tidak semua asumsi awal itu terbukti benar, maka hal ini dianggap kontradiksi dengan asumsi awal. Sehingga terbukti bahwa $src(1Spl - (C_n)) \geq 5$ untuk $n = 8$.

- Kasus 3.3. Untuk $n = 9$. Karena $diam(1Spl - (C_n)) = 4$, maka $4 \leq rc(1Spl - (C_n)) \leq src(1Spl - (C_n)) \leq 5$. Akan ditunjukkan $src(1Spl - (C_n)) \geq 5$. Maka diasumsikan $src(1Spl - (C_n)) = 4$. Misalkan c' adalah pewarnaan 4-rainbow.
  - Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c'(v_{i-1}v_{i,1}) \neq c'(v_{i+1}v_{i,1})$.Misalkan $c'(v_{i-1}v_{i,1}) = 1$ dan $c'(v_{i+1}v_{i,1}) = 2$ untuk $1 \leq i \leq n$ dengan $n = 9$. Selanjutnya akan dilihat lintasan-lintasan sebagai berikut:
- Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_{j,1}$.
  - Kemudian akan dilihat lintasan $\mathrm{u - t: v_1 - v_{5,1}}$. Maka hal ini memaksakan $\mathrm{c'(v_1v_2) = 3; c'(v_2v_3) = 4}$. Begitu pula untuk pewarnaan busur-busur pada subgraf $\mathrm{C_9}$ selanjutnya melingkar searah jarum jam. Sehingga $\mathrm{v_1 - v_2 - v_3 - v_{4,1} - v_5 - v_4 - v_{5,1}}$ tidak menjadi geodesic rainbow.
  - Selanjutnya akan dilihat lintasan $\mathrm{u - t: v_9 - v_{3,1}}$. Berdasarkan pewarnaan subgraf $\mathrm{C_9}$, maka mengakibatkan $\mathrm{v_8 - v_9 - v_1 - v_2 - v_{3,1}}$ bukan geodesic rainbow.

Maka hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.

- Apabila simpul u, t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_{j,1}$ dan $t = v_{k,1}$. Maka lintasan-lintasan di bawah ini:
  - $\mathrm{u - t: v_{8,1} - v_9 - v_1 - v_2 - v_{3,1}}$ bukan geodesic rainbow.
  - $\mathrm{u - t: v_{1,1} - v_9 - v_8 - v_7 - v_{6,1}}$ adalah geodesic rainbow. Kontradiksi.
- Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$. Berdasarkan pewarnaan c',
  - Akan dilihat lintasan $\mathrm{u - t: v_1 - v_2 - v_3 - v_{4,1} - v_5}$ menjadi geodesic rainbow.
  - Akan dilihat lintasan $\mathrm{u - t: v_1 - v_6}$. Maka akan menjadi geodesic rainbow jika $\mathrm{u - t: v_1 - v_9 - v_8 - v_{7,1} - v_6}$. Terbukti.

Karena tidak semua asumsi awal itu terbukti benar, maka hal ini dianggap kontradiksi dengan asumsi awal.

- Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c'(v_{i-1}v_{i,1}) = c'(v_{i+1}v_{i,1}) = 1$.

Selanjutnya akan dilihat lintasan-lintasan sebagai berikut:

- Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_{j,1}$.
  - Kemudian akan dilihat lintasan $\mathrm{u - t: v_1 - v_{4,1}}$. Maka hal ini memaksakan $\mathrm{c'(v_1v_2) = 2; c'(v_2v_3) = 3; c'(v_3v_4) = 4}$. Begitu pula untuk pewarnaan busur-busur pada subgraf $\mathrm{C_9}$ selanjutnya melingkar searah jarum jam. Sehingga $\mathrm{v_1 - v_2 - v_3 - v_{4,1}}$ menjadi geodesic rainbow.
  - Selanjutnya akan dilihat lintasan $\mathrm{u - t: v_1 - v_{5,1}}$. Berdasarkan pewarnaan subgraf $\mathrm{C_9}$, maka mengakibatkan $\mathrm{v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_{5,1}}$ adalah geodesic rainbow.Terbukti.
- Apabila simpul u, t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_{j,1}$ dan $t = v_{k,1}$. Maka lintasan-lintasan di bawah ini:
  - $\mathrm{u - t: v_{1,1} - v_2 - v_1 - v_{2,1}}$ bukan geodesic rainbow.
  - $\mathrm{u - t: v_{1,1} - v_9 - v_8 - v_7 - v_{6,1}}$ bukan geodesic rainbow.

  Maka kontradiksi dengan asumsi awal.
- Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$. Berdasarkan pewarnaan c',
  - Akan dilihat lintasan $\mathrm{u - t: v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5}$ bukan geodesic rainbow.
  - Akan dilihat lintasan $\mathrm{u - t: v_9 - v_2}$. Maka bukan geodesic rainbow pada $\mathrm{u - t: v_9 - v_1 - v_2}$. Maka kontradiksi dengan asumsi awal.

Karena tidak semua asumsi awal itu terbukti benar, maka hal ini dianggap kontradiksi dengan asumsi awal. Sehingga terbukti bahwa $src(1Spl - (C_n)) \geq 5$ untuk $n = 9$. Dengan demikian terbukti bahwa $src(1Spl - (C_n)) \geq 5$. Berdasarkan konstruksi pewarnaan s maka diperoleh $src(1Spl - (C_n)) \leq 5$. Sehingga terbukti bahwa $src(1Spl - (C_n)) = 5$ untuk $n = \{7,8,9\}$.

♦ Kasus 4: $untuk\ n = 10$

Misalkan untuk $n = 10$ maka $src(1Spl - (C_n)) = 6$. Didefinisikan $c: E\big(1\ Spl - (C_n)\big) \rightarrow \{1,2,\ldots,6\}$ dengan $c(e_i)$ sebagai berikut: $c(v_i v_{i+1}) = i(mod 4)$, $c\big(v_{i-1} v_{i,1}\big) = 5$ dan $c\big(v_{i,1} v_{i+1}\big) = 6$. Kemudian akan ditunjukkan $src(G) \geq 6$. Karena $src(1Spl - (C_n)) \geq rc(1Spl - (C_n)) \geq diam(1Spl - (C_n)) = 5$, maka $src(1Spl - (C_n)) \geq 5$. Asumsikan $src(1Spl - (C_n)) = 5$. Misalkan c' adalah pewarnaan 5-rainbow.

- Kasus 4.1. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c'\big(v_{i-1} v_{i,1}\big) \neq c'\big(v_{i+1} v_{i,1}\big)$. Misalkan $c'\big(v_{i-1} v_{i,1}\big) = 1$ dan $c'\big(v_{i+1} v_{i,1}\big) = 2$ untuk $1 \leq i \leq n$ dengan $n = 10$. Selanjutnya akan dilihat lintasan-lintasan sebagai berikut:
  - Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_{j,1}$.
    - Kemudian akan dilihat lintasan $\mathrm{u - t: v_1 - v_{5,1}}$. Maka hal ini memaksakan $\mathrm{c'(v_1 v_2) = 3; c'(v_2 v_3) = 4; c'(v_3 v_4) = 5}$. Begitu pula untuk pewarnaan busur-busur pada subgraf $\mathrm{C_{10}}$ selanjutnya melingkar searah jarum jam. Sehingga $\mathrm{v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_{5,1}}$ menjadi geodesic rainbow.
    - Selanjutnya akan dilihat lintasan $\mathrm{u - t: v_1 - v_{6,1}}$. Berdasarkan pewarnaan subgraf $\mathrm{C_{10}}$, maka mengakibatkan $\mathrm{v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_{6,1}}$ ataupun $\mathrm{v_1 - v_{10} - v_9 - v_8 - v_7 - v_{6,1}}$ tidak menjadi geodesic rainbow.
    - Maka hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.
  - Apabila simpul u, t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_{j,1}$ dan $t = v_{k,1}$. Maka lintasan-lintasan di bawah ini:
    - $\mathrm{u - t: v_{9,1} - v_8 - v_7 - v_6 - v_5 - v_{4,1}}$ adalah geodesic rainbow.
    - Selanjutnya akan dilihat lintasan $\mathrm{u - t: v_{9,1} - v_{3,1}}$. Sehingga, pewarnaan $\mathrm{c'}$, maka lintasan $\mathrm{v_{9,1} - v_{10} - v_1 - v_2 - v_{3,1}}$ tersebut tidak geodesic rainbow.
    - Maka hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.
  - Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$. Berdasarkan pewarnaan c',
    - Akan dilihat lintasan $\mathrm{u - t: v_{10} - v_1 - v_{2,1} - v_3 - v_4}$ menjadi geodesic rainbow.
    - Akan dilihat lintasan $\mathrm{u - t: v_{10} - v_5}$. Maka akan menjadi geodesic rainbow jika $\mathrm{u - t: v_{10} - v_9 - v_8 - v_7 - v_{6,1} - v_5}$. Terbukti.

Karena tidak semua asumsi awal itu terbukti benar, maka hal ini dianggap kontradiksi dengan asumsi awal.

- Kasus 4.2. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c'\big(v_{i-1} v_{i,1}\big) = c'\big(v_{i+1} v_{i,1}\big) = 1$ untuk $\leq i \leq n$ dengan $n = 10$. Oleh karena itu, hal ini memaksakan pewarnaan $v_i v_{i+1}$ menjadi pewarnaan dengan 4 warna yaitu $\{2,3,4,5\}$. Anggap pewarnaanya memutar searah jarum jam yang dimulai dari busur $v_1 v_2$. Selanjutnya akan dilihat lintasan berikut:
  - Apabila simpul u merupakan simpul dalam dan simpul t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_{j,1}$.

- Kemudian akan dilihat lintasan $\mathrm{u-t: v_9 - v_{4,1}}$. Berdasarkan asumsi di atas, lintasannya menjadi $\mathrm{v_9 - v_8 - v_7 - v_6 - v_5 - v_{4,1}}$. Sehingga $\mathrm{v_9 - v_{4,1}}$ menjadi geodesic rainbow.
- Selanjutnya akan dilihat lintasan $\mathrm{u-t: v_9 - v_{3,1}}$. Karena didapatkan lintasan $\mathrm{v_9 - v_1 - v_2 - v_{3,1}}$ maka tidak mengakibatkan $\mathrm{v_9 - v_{3,1}}$ menjadi geodesic rainbow.
- Maka hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.

• Apabila simpul u, t merupakan simpul luar. Misalkan $u = v_{j,1}$ dan $t = v_{k,1}$.
  - Akan dilihat lintasan $\mathrm{u-t: v_{1,1} - v_2 - v_1 - v_{3,1}}$. Sehingga, karena $\mathrm{c'(v_{i-1}v_{i,1}) = c'(v_{i+1}v_{i,1}) = 1}$, maka tidak ada geodesic rainbow.
  - Akan dilihat lintasan $\mathrm{u-t: v_{1,1} - v_2 - v_3 - v_{4,1}}$. Sehingga, karena $\mathrm{c'(v_{i-1}v_{i,1}) = c'(v_{i+1}v_{i,1}) = 1}$, maka lintasan tersebut bukan geodesic rainbow. Hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.

• Apabila simpul u, t merupakan simpul dalam. Misalkan $u = v_i$ dan $t = v_l$.
  - Akan dilihat lintasan $\mathrm{u-t: v_9 - v_3}$. Maka jika $\mathrm{u-t: v_9 - v_1 - v_2 - v_3}$ tidak menjadi geodesic rainbow.
  - Akan dilihat lintasan $\mathrm{u-t: v_9 - v_4}$. Maka jika $\mathrm{u-t: v_9 - v_1 - v_2 - v_3 - v_4}$ tidak menjadi geodesic rainbow.
  - Hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.

Karena tidak semua asumsi awal itu terbukti benar, maka hal ini dianggap kontradiksi dengan asumsi awal. Dengan demikian $src(1Spl - (C_n)) \geq 6$. Karena berdasarkan konstruksi pewarnaan diperoleh $src(1Spl - (C_n)) \leq 6$, maka $src(1Spl - (C_n)) = 6$ untuk $n = 10$.

3 Kesimpulan

Pada penelitian ini didapatkan hasil *strong rainbow connection* (src) dari graf $1Spl - C_n$ untuk $3 \leq n \leq 10$. Sehingga masih banyak graf lain yang belum diteliti.

Open Problem 1. Bagaimana hasil *strong rainbow connection* (src) pada graf $1\ Spl - C_n$ untuk $n > 10$?

Open Problem 2. Misalkan G adalah sembarang graf. Bagaimana hasil *strong rainbow connection* (src) pada graf split G?

4 Daftar Pustaka

[1] Gary Chartrand, dkk. 2008. *Rainbow Connection in Graphs*. Mathematica Bohemica 133. Hal: 85-98.

[2] Kiki A. S., dkk. 2014. Teori Graf dan Aplikasinya. Depok:Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia.

[3] S.K. Vaidya, dkk. 2011. *Some New Odd Harmonious Graphs*. International Journal of Mathematics and Soft Computing 1. Hal: 9-16.