Jurnal UJMC, Volume 3, Nomor 2, Hal. 17 - 24
pISSN : 2460-3333 eISSN : 2579-907X

DIAGONALISASI MATRIKS HILBERT

Randhi N. Darmawan[1]

[1] Universitas PGRI Banyuwangi, randhi.numeric@gmail.com

Abstract. The Hilbert matrix is a square matrix $H_{n\times n} = H_n$ with entries being the unit fraction $H_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$. Since some reason Hilbert matrix is call bad condition. On this research we will examine process diagonalizing of Hilbert matrix H_2 and H_3 and also to determine whether both of the matrix possible to diagonalize with some matrix P.Matrix P is said to be diagonalize H_n if satisfy the result of the condition $P^{-1}H_nP$is diagonal matrix.

Key Words: *Eigen Values, Eigen Vectors,Diagonalization, Hilbert Matrices*

Abstrak. Matriks Hilbert adalah suatu matriks bujur sangkar $H_{n\times n} = H_n$ dengan entri-entrinya adalah unit pecahan yang didefinisikan $H_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$. Karena suatu alasan tertentu matriks Hilbert dikatakan matriks kondisi buruk. Pada penelitian ini akan dikaji proses diagonalisasi dari matriks Hilbert H_2 dan H_3 dan juga memastikan apakah kedua matriks tersebut memungkinkan untuk didiagonalisasi dengan suatu matriks P. Matriks P dikatakan mendiagonalisasi H_n jika memenuhi hasil dari kondisi $P^{-1}H_nP$ adalah matriks diagonal.

Kata Kunci: *Nilai Eigen, Vektor Eigen, Diagonalisasi, Matriks Hilbert*

1 Pendahuluan

Aljabar linier merupakan salah satu cabang dari matematika yang di dalamnya terdapat suatu konsep yang sering digunakan dalam berbagai cabang ilmu, yaitu matriks. Matriks adalah susunan bilangan, simbol, atau ekspresi yang disusun dalam baris dan kolom sehingga membentuk suatu bangun persegi atau persegi panjang [1]. Suatu matriks memiliki bentuk dan ukuran berbeda-beda, ukuran ini yang disebut dengan ordo matriks yang ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom dari suatu matriks.Jika suatumatriks Amempunyai $m$baris dan n kolom maka matriks tersebut dinyatakan dengan matriks ordo $m \times n$ dan ditulis dengan $A_{m\times n}$. Jika banyak baris dan kolom dari matriks tersebut sama $(m = n)$ maka matriks tersebut dinamakan matriks bujur sangkar.

Suatu matriks yang dapat dibalik (memiliki invers) hanyalah matriks bujur sangkar oleh karena itu matriks bujur sangkar merupakan salah satu syarat dalam menentukandiagonalisasi dalam sebuah matriks. Diagonalisasi matriks banyak diterapkan dalam berbagai ilmu matematika, misalnya penerapan diagonalisasi matriks dalam irisan kerucut dan persamaan differensial dimana dalam penerapannyadiagonalisasi dilakukan pada matriks dengan unsur bilangan real.

Salah satu jenis matriks bujur sangkar yang sering digunakan dalam berbagai aplikasi atau penelitian adalah matriks diagonal. Matriks diagonal merupakan salah satu bentuk matriks bujur sangkar dengan semua entri diluar diagonal utamanya nol dan paling tidak terdapat satu entri pada diagonal utamanya tidak sama dengan nol.Jika suatu matriks Aberbentuk diagonal, maka entri diagonal utama dari matriks A adalah nilai-nilai eigen dari matriks A[2].

Masalah diagonalisasi ini bertujuan untuk menunjukkan misal diberikan suatu matriks $A_{n\times n}$ makan dapat ditentukan suatu matriks P yang dapat dibalik dan sedemikian hingga $P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal. Matriks bujur sangkar yang digunakan dalam penelitian ini adalah matriks Hilbert H_n yang merupakan matriks berkondisi buruk, meski demikian ruang matriks Hilbert telah diterapkan dalam klasifikasi *Support Tensor Machine* (STM) dan perbandingan himpunan data hasil eksperimen dalam kehidupan nyata [3].

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka penelitian ini difokuskan pada matriks Hilbert ordo 2×2 (H_2) dan ordo 3×3 (H_3), apakah dari masing-masing matriks tersebut dapat ditentukan matriks P yang mendiagonalisasi sehingga hasil dari $P^{-1}H_nP$adalah matriks diagonal.

2 Metode Penelitian

Sebelum masuk pada langkah-langkah penelitian, pada bagian iniakan dijabarkan beberapa definisi, teorema, dan penelitian terdahulu yang dijadikan landasan berpijak peneliti untuk melakukan proses diagonalisasi matriks Hilbert.

Definisi 1
Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor taknol $\mathbf{x}$ *pada R^n disebut* ***vektor eigen*** *(eigenvector) dari A jika $A\mathbf{x}$ adalah sebuah kelipatan scalar dari* $\mathbf{x}$*; jelasnya $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$untuk sebarang λ, Skalar λ disebut* ***nilai eigen*** *(eigenvalue) dari A, dan* $\mathbf{x}$*disebut sebagai vektor eigen yang terkait dengan* λ[2].

Teorema 1
Sebuah matriks bujur sangkar A dapat dibalik jika dan hanya jika $\lambda = 0$ bukan merupakan nilai eigen dari A[2].
Bukti. Asumsikan bahwa A adalah matriks bujur sangkar dan $\lambda = 0$ adalah solusi dari persamaan karakteristik

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0 \qquad (1)$$

jika dan hanya jika kontanta c_n adalah nol. Sehingga, akan cukup untuk membuktikan bahwa A dapat dibalik jika dan hanya jika $c_n \neq 0$. Akan tetapi

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n \qquad (2)$$

atau dengan menetapkan $\lambda = 0$, sehingga persamaan (2) menjadi,

$$\det(-A) = c_n \quad \text{atau} \quad (-1)^n\det(A) = c_n \qquad (3)$$

Berdasarkan Persamaan (3), $\det(A) = 0$ jika dan hanya jika $c_n = 0$, dan hal ini pada gilirannya akan mengimplikasikan bahwa A dapat dibalik jika dan hanya jika $c_n \neq 0$.

■

Definisi 2
Sebuah matriks bujur sangkar A dikatakan ***dapat didiagonalisasi*** *(diagonalizable) jika terdapat sebuah matriks P yang dapat dibalik sedemikian hingga* $P^{-1}AP$ *adalah sebuah matriks diagonal; matriks P dikatakan* ***mendiagonalisasi*** *(diagonalize)*A[2].

Definisi 3
Matriks Hilbert adalah suatu matriks bujur sangkar yangentri-entrinya adalah unit pecahan yang didefinisikan

$$H_n = H_{i,j} = \frac{1}{i+j-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

Penelitian dari [4] terkait determinan matriks Hilbert menggunakan bantuan *software* SAS/IML menunjukkan bahwa semakin besar ordo dari suatu matriks Hilbert maka nilai determinan akan mendekati nol sehingga berdampak pada invers matriks tersebut sebagaimana dijabarkan pada [5] untuk ordo matriks Hilbert yang kecil dan menengah masih dapat ditentukan inversnya secara komputasi numerik akan tetapi untuk matriks Hilbert (H_n) ordo besar dengan $n \to \infty$ akan sulit ditentukan karena matriks tersebut adalah matriks singular atau dengan kata lain $\det(H_n) = 0; n \to \infty$.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur yaitudengan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti jurnal ilmiah dan buku-buku yang relevan. Penelitiandilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku aljabar linear, dan buku-buku matematika lain yang mendukung penelitian.Perhitungan penelitian ini menggunakan perhitungan komputasi numerik dengan bantuan *software* Maple dengan data awal yang digunakan dalam penelitian ini adalah matriks Hilbert H_2 dan H_3 sebagai berikut.

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad H_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini sebagai berikut:

a. Input data awal, yaitu pendefinisian matriks Hilbert H_2 dan H_3.
b. Menentukan nilai eigen λ dan vektor-vektor eigen dari matriks Hilbert H_2 dan H_3 yang saling bebas linier, misalkan $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}$untuk H_2 serta $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}$untuk$H_3$.
c. Membentuk matriks P_2 =$[\mathbf{p_1}|\mathbf{p_2}]$ dan P_3 =$[\mathbf{p_1}|\mathbf{p_2}|\mathbf{p_3}]$.
d. Menentukan matriks $D_2 = P_2^{-1}H_2P$ dan $D_3 = P_3^{-1}H_3P$ apakah berupa matriks diagonal atau bukan.

e. Output berupa matriks D_2 dan D_3.

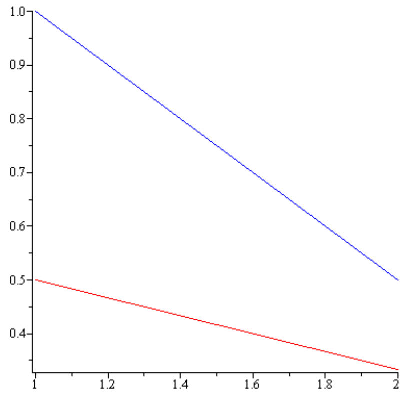
3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Proses Diagonalisasi Matriks Hilbert H_2

Misal diketahui matriks HilbertH_2,

$$H2 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan perintah *matrixplot*pada Maple dengan terlebih dahulu mendefinisikan vektor data maka grafik dari matriks Hilbert H_2 sebagai berikut,



Gambar 1. Grafik matriksHilbertH_2

Berdasarkan Definisi 1, maka dapat ditentukan nilai eigen dari matriks HilbertH_2 yaitu,

$$\lambda_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{13} \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{13}$$

sehingga didapatkan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1 dan λ_2 yaitu $\mathbf{p_1}$ dan $\mathbf{p_2}$sebagai berikut,

$$p1 := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{13}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad p2 := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{13}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kemudian dari vektor eigen tersebut didapatkan matriks $P_2 = [\mathbf{p_1}|\mathbf{p_2}]$ sebagai berikut,

$$P2 := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{13}} & \dfrac{1}{-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{13}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Langkah selanjutnya akan ditentukan invers dari matriks P_2 tersebut sehingga didapatkan P_2^{-1} sebagai berikut,

$$P_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{78}\sqrt{13}(-2+\sqrt{13})(2+\sqrt{13}) & \frac{1}{26}(-2+\sqrt{13})\sqrt{13} \\ -\frac{1}{78}\sqrt{13}(-2+\sqrt{13})(2+\sqrt{13}) & \frac{1}{26}(2+\sqrt{13})\sqrt{13} \end{bmatrix}.$$

Langkah terakhir dari tahap diagonalisasi adalah menentukan $P_2^{-1}H_2P$yang merupakan matriks diagonal, pada tahap ini dengan menggunakan perhitungan pembulatan secara numerik didapatkan sebagai berikut,

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1,267591879 & 3.10^{-11} \\ 4.10^{-10} & 0,0657414540 \end{bmatrix}$$
$$D_2 \approx \begin{bmatrix} 1,267591879 & 0 \\ 0 & 0,0657414540 \end{bmatrix}$$

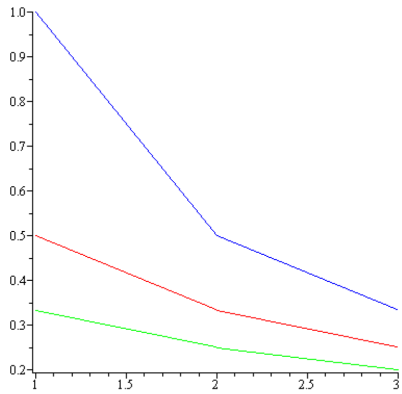
sehingga didapatkan matriks diagonal D_2 yang berarti matriks Hilbert H_2 dapat didiagonalisasi.

3.2 Proses Diagonalisasi Matriks Hilbert H_3

Misal diketahui matriks Hilbert H_3,

$$H3 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan perintah *matrixplot*pada Maple dengan terlebih dahulu mendefinisikan vektor data maka grafik dari matriks Hilbert H_3 sebagai berikut,



Gambar 2. Grafik matriks HilbertH_3

Dengan langkah yang sama seperti pada matriks Hilbert H_2 akan tetapi pada kasus H_3 melibatkan angka-angka yang lebih rumit dan panjang sehingga akan sulit dalam proses perhitungan secara analitik sehingga digunakan proses perhitungan secara numerik, jadi didapatkan nilai eigen yang merupakan bukan bilangan real (bilangan kompleks), sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.408318927 - 4.\ 10^{-11}\ \mathrm{I} \\ 0.00268734034 - 5.67350269410^{-10}\ \mathrm{I} \\ 0.1223270659 + 5.87350269410^{-10}\ \mathrm{I} \end{bmatrix}$$

sehingga didapatkan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1, λ_2 dan λ_3 yaitu $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$ dan $\mathbf{p_3}$ sebagai berikut,

$$p1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p2 := \begin{bmatrix} 0.55603257 + 1.00441371210^{-9}\ \mathrm{I} \\ -5.591028000 - 2.36673959410^{-8}\ \mathrm{I} \\ -0.9650045750 + 2.09167734410^{-8}\ \mathrm{I} \end{bmatrix}$$

$$p3 := \begin{bmatrix} 0.39090792 - 2.50662056810^{-9}\ \mathrm{I} \\ 5.394604027 + 3.35190431010^{-8}\ \mathrm{I} \\ -1.185511933 - 2.98931093510^{-8}\ \mathrm{I} \end{bmatrix}$$

Kemudian dari vektor eigen tersebut didapatkan matriks $P_3 = [\mathbf{p_1}|\mathbf{p_2}|\mathbf{p_3}]$ dengan asumsi bahwa nilai entri matriks tidak real(bagian imajiner) mendekati 0 (nol), maka didapatkanvektor eigen sebagai berikut,

$$P3 := \begin{bmatrix} 1 & 0.55603257 & 0.39090792 \\ 1 & -5.591028000 & 5.394604027 \\ 1 & -0.9650045750 & -1.185511933 \end{bmatrix}.$$

Langkah selanjutnya akan ditentukan invers dari matriks P_3 tersebut sehingga didapatkan P_3^{-1} sebagai berikut,

$$P_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6840033117 & 0.01629690618 & 0.2996997817 \\ 0.3803281105 & -0.09111644654 & -0.2892116640 \\ 0.2673823317 & 0.08791534783 & -0.3552976796 \end{bmatrix}.$$

Langkah terakhir dari tahap diagonalisasi adalah menentukan $P_3^{-1}H_3P$ yang merupakan matriks diagonal, pada tahap ini dengan menggunakan perhitungan pembulatan secara numerik dengan asumsi bahwa nilai entri matriks tidak real (imajiner) mendekati 0 (nol), didapatkan sebagai berikut,

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1{,}5064 & -2{,}2028 & 2{,}2418 \\ 0{,}3720 & -0{,}4011 & 0{,}5104 \\ 0{,}3071 & -0{,}3461 & 0{,}4280 \end{bmatrix}$$

sehingga didapatkan matriks D_3 yang bukan merupakan matriks diagonal yang berarti matriks Hilbert H_3 tidak dapat didiagonalisasi.

3.3 Pembahasan

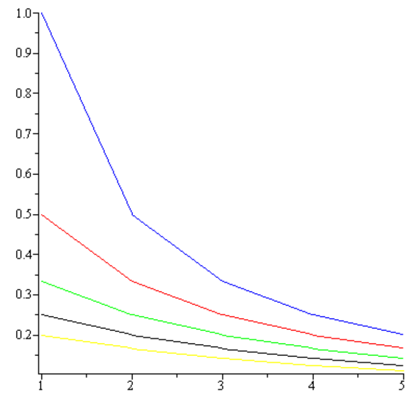
Berdasarkan hasil penilitian yang telah dijabarkan di atas maka terdapat dua hal yang berbeda yaitu pada matriks Hilbert H_2 yang dapat didiagonalisasi dan matriks Hilbert H_3 yang tidak dapat didiagonalisasi. Pada pembahasan ini akan dijelaskan penyebab perbedaan dua hal tersebut. Matriks Hilbert adalah salah satu matriks dengan kondisi buruk dengan entri-entri yang unik dan membentuk suatu pola bilangan, yang mana semakin besar ukuran matriks Hilbert maka nilai determinan akan mendekati 0 atau dengan kata lain akan menjadi matriks singular [4].

Dampak dari suatu matriks singular adalah matriks tersebut tidak dapat dibalik atau tidak dapat ditentukan nilai inversnya, oleh karena itu data berikut akan memberikan informasi terkait singularitas matriks Hilbert

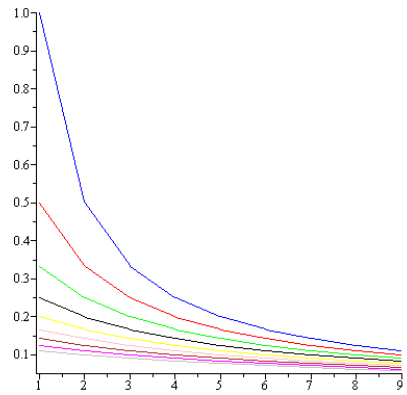
Tabel 1. Determinan Matriks Hilbert

Matriks Hilbert	Determinan
H_2	$\frac{1}{12} \approx 0.08333333333$
H_3	$\frac{1}{2160} \approx 0.0004629629630$
H_4	$\frac{1}{6048000} \approx 0.000000165$
H_5	$\frac{1}{266716800000} \approx 3{,}7492 \times 10^{-12}$
H_9	$9{,}7202 \times 10^{-43}$
$\vdots$	$\vdots$
H_n	$a_n n^{\left(-\frac{1}{4}\right)} (2\pi)^n 4^{(-n^2)}$
$H_{n\to\infty}$	0

Berikut ini akan disajikan grafik ilustrasi dari matriks Hilbert H_5 dan H_9 sebagai fakta pendukung bahwa determinan matriks Hilbert $H_{n\to\infty}$ adalah 0.



Gambar 3. Grafik Matriks Hilbert H_5



Gambar 4. Grafik Matriks Hilbert H_9

Berdasarkan data pada Tabel 1 tersebut maka masih memungkinkan menentukan invers matriks Hilbert H_2 sehingga proses diagonalisasi juga masih bisa ditentukan secara analitik maupun numerik, hal ini dapat dilihat dari nilai eigen yang didapatkan berupa bilangan real yaitu

$$\lambda_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{13} \text{ dan } \lambda_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{13}.$$

Pada matriks Hilbert H_3 memiliki determinan yang mulai mendekati nol, meskipun masih memungkinkan untuk ditentukan inversnya akan tetapi problem muncul saat proses diagonalisasi yaitu dari nilai eigen yang didapatkan berupa bilangan kompleks yaitu seperti pada perhitungan diagonalisasi matriks Hilbert H_3 di atas sehingga pada proses berikutnya yaitu penentuan vektor eigen selalu melibatkan bilangan kompleks yang cukup rumit sehingga matriks D_3 yang didapatkan bukanlah matriks diagonal.

Berdasarkan penelitian diagonalisasi pada matriks Hilbert H_3 yang cukup rumit proses diagonalisasinya karena melibatkan bilangan kompleks yang menghasilkan kesimpulan matriks Hilbert H_3 tidak dapat didiagonalisasi, maka peneliti memiliki dugaan kuat bahwa untuk proses diagonalisasi matriks Hilbert H_4, H_5, H_6, bahkan H_n tidak dapat didiagonalisasi karena nilai determinan mendekati 0 (nol) sehingga berakibat tidak memiliki invers.

4 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan di atas, maka dapat disimpulan beberapa hal sebagai berikut.

a. Diagonalisasi matriks Hilbert H_2 dapat dilakukan, hal ini ditunjukkan dengan didapatkannya matriks P_2 yaitu,

$$P2 := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{13}} & \dfrac{1}{-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{13}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

yang mendiagonalisasi matriks Hilbert H_2 dengan dibuktikan bahwa $D_2 = P_2^{-1} H_2 P$ adalah matriks diagonal yaitu,

$$D_2 \approx \begin{bmatrix} 1{,}267591879 & 0 \\ 0 & 0{,}0657414540 \end{bmatrix}$$

b. Diagonalisasi matriks Hilbert H_3 tidak dapat dilakukan, hal ini ditunjukkan dengan didapatkannya matriks P_3 yaitu,

$$P3 := \begin{bmatrix} 1 & 0.55603257 & 0.39090792 \\ 1 & -5.591028000 & 5.394604027 \\ 1 & -0.9650045750 & -1.185511933 \end{bmatrix}$$

yang tidak mendiagonalisasi matriks Hilbert H_3 dengan dibuktikan bahwa $D_3 = P_3^{-1} H_3 P$ adalah bukan matriks diagonal yaitu,

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1{,}5064 & -2{,}2028 & 2{,}2418 \\ 0{,}3720 & -0{,}4011 & 0{,}5104 \\ 0{,}3071 & -0{,}3461 & 0{,}4280 \end{bmatrix}$$

c. Didapatkan dugaan kuat yaitu matriks Hilbert ordo tinggi tidak dapat didiagonalisasi.

Daftar Pustaka

[1] Hazewinkel, M. 2001. *Encyclopedia of Mathematics*. Springer. Springer, ISBN978-1-55608-010-4.
[2] Anton, H., dan Rorres, C. 2005. *Elementary Linier Algebra Application Version (Ninth Edition Ed.).* John Willey & Son, Inc.
[3] Ye, Y. 2017. The Matrix Hilbert Space and Its Application to Matrix Learning. *arXiv:1706.08110v2 [stat.ML] 14 Nov 2017*.
[4] Wicklin, R. 2014. *blogs.sas.com*. Retrieved 1123, 2017, fromhttps://blogs.sas.com/content/iml/2014/04/16/the-hilbert-matrix-det.html