Jurnal UJMC, Volume 3, Nomor 1, Hal. 21 - 28
pISSN : 2460-3333 eISSN : 2579-907X

SOLUSI POSITIF MODEL *SIR*

Awawin Mustana Rohmah[1]

[1]Universitas Islam Darul Ulum Lamongan, awawin.emer@gmail.com

Abstract Model that describes the epidemic spread of disease can spread in this area, one of which can be formed in the mathematical model of endemic SIR (susceptible, infected, and recovery). Based on the model, we can analysis existence and uniqueness, it shows that the system has solution and unique. Furthermore SIR indicated that the model has a positive solution. The final results obtained from this study is SIR model of having a uniqueand solution, as well as solutions that model is positive.

Keywords: *SIR model, Exsistence and unique, positive solution.*

Abstrak. Model epidemik yang menggambarkan penyebaran penyakit dapat menularkan di suatu wilayah yang salah satunya dapat dibentuk dalam model matematika endemik SIR (*susceptible*, *infected*, dan *recovery*). Berdasarkan model tesebut, dilakukan analisa eksitensi dan ketunggalan, hal ini menunjukkan bahwa sistem mempunyai penyelesaian dan tunggal. Selanjutnya ditunjukkan bahwa model SIR mempunyai penyelesaian positif. Adapun hasil akhir yang diperoleh dari penelitian ini adalah model SIR mempunyai penyelesaian dan tunggal, serta solusi model tersebut posistif.

Kata Kunci: *Model SIR, Eksistensi dan ketunggalan solusi, solusi positif*.

1 Pendahuluan

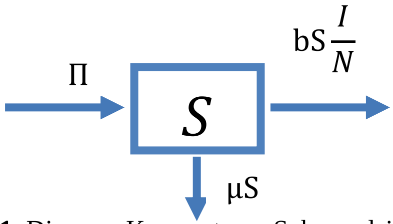
Penyakit menular dapat menyebar melalui kontak langsung maupun tidak langsung, sehingga dapat mengakibatkan infeksi yang berperan pada penyebaran penyakit. Model *SIR* merupakan salah satu model epidemi yang menggambarkan penyebaran penyakit infeksi dengan adanya penyembuhan dan tanpa adanya kekebalan terhadap infeksi tersebut. Pada model tersebut populasi dibedakan menjadi tiga subpopulasi yaitu subpopulasi *susceptible*$\left(S(t)\right)$atau subpopulasi individu yang rentan terhadap penyakit, subpopulasi *infective*$(I(t))$atau subpopulasi individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit serta subpopulasi *recovered*$(R(t))$ atau subpopulasi yang telah sembuh.

Pada penelitian ini, dikonstruksi model penyebaran penyakit tipe *SIR* yang dibahas oleh [1]. Untuk mengetahui perilaku dari model *SIR* perlu dilakukan analisa. Analisis yang dapat dilakukan meliputi eksistensi dan ketunggalan penyelesaian dari model *SIR* dengan menunjukkan konstanta Lipschitz. Analisis eksistensi dan ketunggalan dilakukan dengan tujuan untuk mengetahui bahwa model yang dibangun memiliki penyelesaian dan tunggal. Selanjutnya perlu ditunjukkan bahwa model tersebut mempunyai solusi positif, dimana dapat diketahui bahwa sistem tersebut memiliki aliran yang kontinu.

2 Pembahasan

2.1 Model Matematika

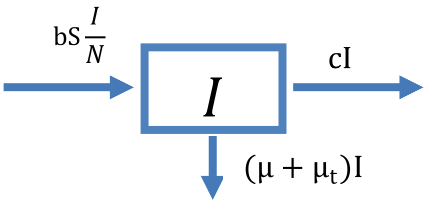
Jumlah subpopulasi S akan bertambah karena banyaknya kelahiran sebesar Π, namun berkurang karena adanya kematian alami dengan laju μ serta adanya kontak antara individu s_i bertemu dengan i_i yang mengkibatkan jumlah subpopulasi S berkurang dan masuk menjadi subpopulasi I sebesar b.



Gambar 1. Diagram Kompartmen Subpopulsi *Susceptible*

Berdasarkan Gambar 1 dapat dijelaskan bahwa ada perubahan pada jumlah subpopulasi S persatuan waktu, sehingga dapat disebut $\frac{dS}{dt}$.

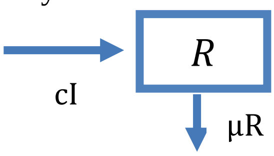
Jumlah subpopulasi I bertambah karena adanya kontak antara individu s_i bertemu dengan i_i yang mana mengakibatkan individu tersebut terinfeksi, serta berkurang karena adanya kematian alami μ dan kematian karena terinfeksi TB sebesar μ_t. Individu terinfeksi dilakukan penyembuhan sehingga mengakibatkan berkurangnya subpopulasi I sebesar c yang masuk dalam subpopulasi R.



Gambar 2. Diagram Kompartmen Subpopulsi *Infected*

Berdasarkan Gambar 2 dapat dijelaskan bahwa ada perubahan pada jumlah subpopulasi I persatuan waktu, sehingga dapat disebut $\frac{dI}{dt}$.

Jumlah subpopulasi R bertambah karena adanya subpopulasi terinfeksi I yang disembuhkan, namun subpopulasi R diasumsikan pada penyakit TB tidak kembali rentan, dan berkurang karena adanya kematian alami sebesar μ.



Gambar 3. Diagram Kompartmen Subpopulsi *Recovered*

Berdasarkan Gambar 3 dapat dijelaskan bahwa ada perubahan pada jumlah subpopulasi R persatuan waktu, sehingga dapat disebut $\frac{dR}{dt}$.

Berdasarkan uraian dan diagram kompartmen tersebut, sehingga dapat dibentuk sistem sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = \Pi - bS\frac{I}{N} - \mu S \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \mathrm{bS}\frac{I}{N} - (c + \mu + \mu_t)I$$
$$\frac{dR}{dt} = \mathrm{cI} - \mu\mathrm{R}$$

2.2 Penyederhanaan Sistem

Pada Persamaan (1) dilakukan penyederhanaan sistem. Misalkan terdapat S sedemikian hingga $S \in C(\Omega, R)$ maka akan ditunjukkan bahwa persamaan tersebut mempunyai penyelesain dan tunggal, lihat subpopulasi S pada interval waktu $t \in [t_1, t_2] \subset [0, \infty)$. Oleh karena itu, interaksi yang terjadi antara individu *susceptible*(S)dengan individu *infected*(I)akan menyebabkan terjadinya perubahan status dari *susceptible* menjadi terinfeksi atau tetap menjadi *susceptible*, ambil sebarang $t = \delta$ dimana $t_1 < \delta < t_2$ interaksi individu (s, i). Sehingga menyebabkan terjadinya perubahan secara proposi sebesar p dengan $(s, i) \approx i$ atau dapat dikatakan bahwa perubahan proporsi yang disebabkan oleh virus dari subpopulasi $b\frac{I}{N}S$ adalah pI atau $(1-p)S$. Dengan demikian untuk setiap $t \in [t_1, t_2] \subset [0, \infty)$ terdapat transisi $b\frac{I}{N}S$ sebesar pI dan $(1-p)S$ dengan $0 < p < 1$ sebagai proporsi yang berarti bahwa pada interval waktu tersebut terdapat individu s yang diskontinu pada $t = \delta$ dan tewrdapat individu s yang kontinu sebagai individu *susceptible*. Persamaan (1) dapat disederhanakan sesuai dengan evolusi virus yang terjadi pada tubuh individu sehingga menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Pi - (1-\mathrm{p})\mathrm{S} - \mu\mathrm{S} \\ \frac{dI}{dt} &= \mathrm{pI} - ((1-q) + \mu + \mu_t)I \\ \frac{dR}{dt} &= \mathrm{qI} - \mu\mathrm{R} \end{aligned} \qquad (2)$$

2.3 Eksistensi dan Ketunggalan

Untuk menunjukkan eksistensi dan ketunggalan sistem dapat ditentukan dengan definisi konstanta Lipschitz. Terdapat konstanta Lipschitz $k(t)$ yang memenuhi

$$\|f(X^1(t), t) - f(X^2(t), t)\| \leq k(t)\|X^1 - X^2\|$$

sedemikian hingga model sistem berlaku untuk setiap $t \in R$.

Persamaan (1), (2) dan (3) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{dX}{dt} = f(X(t), t)$$

atau dapat ditulis

$$\frac{dS}{dt} = f(S(t), t)$$
$$\frac{dI}{dt} = f(I(t), t)$$
$$\frac{dR}{dt} = f(R(t), t),$$

maka akan terdapat $f(X^1(t), t)$ dan $f(X^2(t), t)$ dengan

$$X^1 = \{S^1, I^1, R^1\}$$
$$X^2 = \{S^2, I^2, R^2\}.$$

Selanjutnya akan dicari nilai dari $k(t)$ yang merupakan konstanta Lipschitz yang memenuhi bentuk berikut

$$\|f(X^1(t),t) - f(X^2(t),t)\| \leq k(t)\|X^1 - X^2\|$$

dengan

$\|f(X^1(t),t) - f(X^2(t),t)\| = \left\|\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix}\right\|$ dinyatakan sebagai $a_{i1} = b_{i1} + c_{i1}$, dengan $i = 1,2,3$ maka

$$\|f(X^1(t),t) - f(X^2(t),t)\| = \left\|\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix}\right\| = \|b_{i1} + c_{i1}\|$$

atau

$\|f(X^1(t),t) - f(X^2(t),t)\| \leq \|b_{i1}\| + \|c_{i1}\|$, dengan$\|b_{i1}\| = maks \left\|\sum_{j=1}^{3} |b_{ij}|\right\|$

dengan ketentuan $a_{i1} \leq \|b_{i1}\| + \|c_{i1}\|$ (3)

Selanjutnya berdasarkan Persamaan (2), dapat dibentuk sebagai berikut

i. *Susceptible*

$$\begin{aligned} a_{11} &= \{\Pi - (1-\mathrm{p})\mathrm{S}^1 - \mu\mathrm{S}^1\} - \{\Pi - (1-\mathrm{p})\mathrm{S}^2 - \mu\mathrm{S}^2\} \\ &= -\mu(S^1 - S^2) - 1(S^1 - S^2) + p(S^1 - S^2) \\ a_{11} &= (p - \mu - 1)(S^1 - S^2) \end{aligned}$$

menggunakan ketentuan (3) maka didapatkan

$$\|a_{11}\| \leq \|(p - \mu - 1)(S^1 - S^2)\|. \tag{4}$$

ii. *Infected*

$$\begin{aligned} a_{21} &= \{\mathrm{pI}^1 - ((1-q) + \mu + \mu_t)I^1\} - \{\mathrm{pI}^1 - ((1-q) + \mu + \mu_t)I^1\} \\ &= (p+q)(I^1 - I^2) - (1 + \mu + \mu_t)(I^1 - I^2) \\ a_{21} &= ((p+q) - (1 + \mu + \mu_t))(I^1 - I^2) \end{aligned}$$

menggunakan ketentuan (3) maka didapatkan

$$\|a_{21}\| \leq \|((p+q) - (1 + \mu + \mu_t))(I^1 - I^2)\|. \tag{5}$$

iii. *Recovered*

$$\begin{aligned} a_{31} &= \{qI^1 - \mu R^1\} - \{qI^2 - \mu R^2\} \\ &= q(I^1 - I^2) - \mu(R^1 - R^2) \\ a_{31} &= (q - \mu)(R^1 - R^2) \end{aligned}$$

menggunakan ketentuan (4) maka didapatkan

$$\|a_{31}\| \leq \|(q - \mu)(R^1 - R^2)\|. \tag{6}$$

Selanjutnya Persamaan (5)-(7) dapat dibentuk norm sebagai berikut.

$$\|f(X^1(t),t) - f(X^2(t),t)\| = \left\|\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix}\right\| = \|b_{i1} + c_{i1}\|$$

$\|f(X^1(t),t) - f(X^2(t),t)\| \leq \|b_{i1}\| + \|c_{i1}\|$, dengan$\|b_{i1}\| = maks \left\|\sum_{j=1}^{3} |b_{ij}|\right\|$

Karena yang dibahas hanya satu wilayah sehingga, tidak ada $\|c_{i1}\|$

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix}\right\| \leq \left\|\begin{matrix} (p - \mu - 1)(S^1 - S^2) \\ ((p+q) - (1 + \mu + \mu_t))(I^1 - I^2) \\ (q - \mu)(R^1 - R^2) \end{matrix}\right\| \tag{7}$$

atau

$$\|b_{i1}\| = \operatorname*{maks}_i \left\|\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|\right\|,$$

$$|a_{11}| \leq |(p - \mu - 1)|(|S^1 - S^2|)$$
$$|a_{21}| \leq |((p+q) - (1 + \mu + \mu_t))|(|I^1 - I^2|)$$

$$|a_{31}| \leq |(q-\mu)|(|R^1 - R^2|)$$

$$\left\| \begin{matrix} (p-\mu-1)(S^1-S^2) \\ \big((p+q)-(1+\mu+\mu_t)\big)(I^1-I^2) \\ (q-\mu)(R^1-R^2) \end{matrix} \right\| \leq \text{maks}\{|(p-\mu-1)|, \ \big|\big((p+q)-(1+\mu+\mu_t)\big)\big| \ |(q-\mu)|\} \left\| \begin{matrix} (S^1-S^2) \\ (I^1-I^2) \\ (R^1-R^2) \end{matrix} \right\|$$

Untuk memenuhi nilai maksimum mutlak dari maks $\big\{|(p-\mu-1)|, \big|\big((p+q)-(1+\mu+\mu_t)\big)\big|, |(q-\mu)|\big\}$terhadap tingkat dari individu populasi dapat dilakukan berdasarkan asumsi sebagai berikut. $maks$ $\big\{|(p-\mu-1)|, \big|\big((p+q)-(1+\mu+\mu_t)\big)\big|, |(q-\mu)|\big\}$ adalah $\{|(p)_{max} - (\mu-1)_{min}|, |(p+q)_{max} - (1+\mu+\mu_t)_{min}|, |((q)_{max} - (\mu)_{min})|\}$.

Nilai maksimum tersebut merupakan konstanta *Lipschitz*$k(t)$ dari masing-masing perubahan subpopulasi.Sedemikian hingga diamatikonstanta *Lipschitz* pada subpopulasi *infected* tersebut. $\big((p+q)-(1+\mu+\mu_t)\big)$ adalah tingkat infeksi virus (I), sehingga dapat dikatakan penyebaran penyakit sangat luas jika$(p+q)$ mempunyai nilai maksimum dan nilai dari $(1+\mu+\mu_t)$ minimum.

2.4 Solusi Positif

Berdasarkan Persamaan (1), akan ditentukan total populasi dan solusi postif dengan $N = S + I + R$.

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} \\ &= \Pi - \mathrm{bS}\frac{I}{N} - \mu\mathrm{S} + \mathrm{bS}\frac{I}{N} - (c + \mu + \mu_t)I + \mathrm{cI} - \mu\mathrm{R} \\ &= \Pi - \mu(S + I + R) - \mu_t I \\ &= \Pi - \mu\mathrm{N} - \mu_t I \end{aligned}$$

Misal $\frac{dN}{dt} = k$, dengan k non negatif. Untuk $k = 0$ maka $N = C =$ konstan, hal ini tidak mungkin terjadi karena N bergantung pada waktu. Untuk $k > 0$ berarti

$$\frac{dN}{dt} = k > 0.$$

Misalkan $\lambda(t) = \mu_t I$, sehingga menjadi

$$\frac{dN}{dt} = \Pi - \mu\mathrm{N} - \lambda(t) > 0 \Rightarrow \Pi - \mu\mathrm{N} > \lambda_1(t),$$

sehingga untuk $\frac{dN}{dt} \leq \Pi - \mu\mathrm{N}$ maka $\frac{dN}{dt} = \Pi - \mu\mathrm{N} - \omega$, dengan ω merupakan konstanta > 0. Akibatnya, $\frac{dN}{dt} + \mu\mathrm{N} = \Pi - \omega$. Dengan begitu, $\frac{dN}{dt} + j(t)N = \varphi(t)$ dengan faktor pengintegralnya adalah $v.p = e^{\int j(t)dt}$ sehingga menjadi

$$\begin{aligned} V\frac{dN}{dt} + V\mu\mathrm{N} &= (\Pi - \omega)V \\ \int \frac{d}{dt}(Ne^{\mu t}) &= \int (\Pi - \omega)e^{\mu t}\,dt \\ N &= \frac{(\Pi - \omega)}{\mu} + Ce^{-\mu t} \end{aligned}$$

Selanjutnya ditentukan nilai konstanta C dengan $t = 0$ sehingga

$$N(0) = \frac{(\Pi - \omega)}{\mu} + Ce^{-\mu(0)}$$
$$C = N(0) - \frac{(\Pi-\omega)}{\mu}.$$

Kemudian nilai C disubstitusikan ke $N(t)$ sehingga

$$N(t) = \frac{(\Pi-\omega)}{\mu} + \left(N(0) - \frac{(\Pi-\omega)}{\mu}\right)e^{-\mu t}.$$

Ini berarti untuk $t = 0$,

$$N(t) = N(0) \neq 0,$$

sedangkan untuk $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{(\Pi - \omega)}{\mu} + \left(N(0) - \frac{(\Pi - \omega)}{\mu}\right)e^{-\mu t}\right)$$
$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{(\Pi-\omega)}{\mu}.$$

Agar $\frac{(\Pi-\omega)}{\mu} > 0$ maka $0 < \omega < \Pi$. Dengan kata lain, konstanta (ω) tidak lebih besar dari tingkat kelahiran (Π). Oleh karena itu, diperoleh penyelesaian $N(0) \leq N(t) \leq \frac{(\Pi-\omega)}{\mu}$ untuk $t \in R^+$ yang merupakan penyelesaian positif.

Pada Persamaan (2) akan dibentuk dalam non dimensional dan selanjutnya ditentukan penyelesainnya serta solusi positif.

$$\frac{dS}{dt} = \Pi - (1 - \mathrm{p})\mathrm{S} - \mu\mathrm{S}$$

Disubstitusi dengan $s = \frac{S}{N}$ atau $sN = S$ sehingga diperoleh $N\frac{ds}{dt} = \Pi - (1 - \mathrm{p})\mathrm{Ns} - \mu\mathrm{Ns}$, maka

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\Pi}{N} - (1 - \mathrm{p})\mathrm{s} - \mu\mathrm{s}$$
$$\frac{ds}{dt} + (1 - \mathrm{p})\mathrm{s} + \mu\mathrm{s} = \frac{\Pi}{N}$$
$$N = e^{\theta t}N(0)$$
$$\Pi = \delta sN$$
$$\frac{\Pi}{N} = \frac{\delta sN}{N} = \delta s$$

Berdasarkan bentuk non dimensional tersebut, kemudian ditentukana solusi positifnya. Misal $\frac{ds}{dt} = k$, dengan k non negative. Untuk $k = 0$ maka $s = C =$ konstan, hal ini tidak mungkin terjadi karena N bergantung pada waktu. Untuk $k > 0$ berarti

$$\frac{ds}{dt} = k > 0.$$

Misalkan $\lambda_1(t) = \frac{\Pi}{N}$, sehingga menjadi

$$\frac{ds}{dt} = -(1 - \mathrm{p})\mathrm{s} - \mu\mathrm{s} - \lambda_1(t) > 0 \Rightarrow -(1 - \mathrm{p})\mathrm{s} - \mu\mathrm{s} > \lambda_1(t),$$

sehingga untuk $\frac{ds}{dt} \leq -(1 - \mathrm{p})\mathrm{s} - \mu\mathrm{s}$, maka $\frac{ds}{dt} = -(1 - \mathrm{p})\mathrm{s} - \mu\mathrm{s} + \omega$, dengan ω merupakan konstanta > 0. Akibatnya, $\frac{ds}{dt} + (1 - \mathrm{p})\mathrm{s} + \mu\mathrm{s} = \omega$. Dengan begitu, $\frac{ds}{dt} + j(t)s = \varphi(t)$ dengan faktor pengintegralnya adalah $v.p = e^{\int j(t)dt}$ sehingga menjadi

$$V\frac{ds}{dt} + V(1 + \mu - \mathrm{p})\mathrm{s} = \omega V$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(se^{(1+\mu-p)t}\right) = \int \omega e^{(1+\mu-p)t} dt$$
$$s = \frac{\omega}{(1+\mu-p)} + Ce^{-(1+\mu-p)t}$$

Selanjutnya ditentukan nilai konstanta C dengan $t = 0$ sehingga

$$s(0) = \frac{\omega}{(1+\mu-p)} + Ce^{-(1+\mu-p)0}$$
$$C = s(0) - \frac{\omega}{(1+\mu-p)}.$$

Kemudian nilai C disubstitusikan ke $s(t)$ sehingga

$$s(t) = \frac{\omega}{(1+\mu-p)} + \left(s(0) - \frac{\omega}{(1+\mu-p)}\right) e^{-(1+\mu-p)t}.$$

Ini berarti untuk $t = 0$,

$$s(t) = s(0) \neq 0,$$

sedangkan untuk $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{\omega}{(1+\mu-p)} + \left(s(0) - \frac{\omega}{(1+\mu-p)}\right) e^{-(1+\mu-p)t}\right)$$
$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \frac{\omega}{(1+\mu-p)}.$$

Jelas $\frac{\omega}{(1+\mu-p)} > 0$. Oleh karena itu, diperoleh penyelesaian $s(0) \leq s(t) \leq \frac{\omega}{(1+\mu-p)}$ untuk $t \in R^+$ yang merupakan penyelesaian positif. Sehingga dapat dikatakan bahwa pada interval waktu $t \in [t_1, t_2] \subset [0, \infty)$ subpopulasi *susceptible* monoton turun.

Untuk $\frac{dI}{dt} = \mathrm{bS}\frac{I}{N} - (c + \mu + \mu_t)I,$ analog dengan subpopulasi *susceptible* bahwa persamaan dapat direduksi menjadi $\frac{dI}{dt} = \mathrm{pI} - ((1-q) + \mu + \mu_t)I,$ kemudian untuk melakukan non dimensional terhadap persamaan tersebut dengan melakukan substitusi $i = \frac{I}{N}$ atau $iN = I$ sehingga $N\frac{di}{dt} = \mathrm{pNi} - ((1-q) + \mu + \mu_t)Ni$ maka $\frac{di}{dt} = \mathrm{pi} - ((1-q) + \mu + \mu_t)i,$ karena $s(t)$ monoton turun pada interval $t \in [t_1, t_2] \subset [0, \infty)$ dapat diasumsikan bahwa $i(t)$ monoton naik. Dengan begitu penyelesaiannya adalah

$$\frac{di}{dt} = \mathrm{pi} - ((1-q) + \mu + \mu_t)i$$
$$\int \frac{di}{i} = \int \left(p - \left((1-q) + \mu + \mu_t\right)\right) dt$$
$$i = Ce^{\left(p-\left((1-q)+\mu+\mu_t\right)\right)t}.$$

Selanjutnya ditentukan nilai konstanta C dengan $t = 0$ sehingga

$$i(0) = Ce^{\left(p-\left((1-q)+\mu+\mu_t\right)\right)0}$$
$$C = i(0).$$

Kemudian nilai C disubstitusikan ke $i(t)$ sehingga

$$i(t) = i(0)e^{\left(p-\left((1-q)+\mu+\mu_t\right)\right)t}.$$

Ini berarti untuk $t = 0$,

$$i(t) = i(0) \neq 0,$$

sedangkan untuk $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} i(t) = \lim_{t\to\infty} \left(i(0)e^{\left(p-\left((1-q)+\mu+\mu_t\right)\right)t}\right).$$

Akibatnya, $i(t)$ untuk $t \in R^+$ yang merupakan penyelesaian positif dan dapat dikatakan bahwa pada interval waktu $t \in [t_1, t_2] \subset [0, \infty)$ subpopulasi *infected* monoton naik.

Untuk $\frac{dR}{dt} = \mathrm{cI} - \mu\mathrm{R},$ analog dengan subpopulasi *susceptible* bahwa persamaan dapat direduksi menjadi $\frac{dI}{dt} = \mathrm{qR} - \mu\mathrm{R},$ kemudian untuk melakukan non dimensional terhadap persamaan tersebut dengan melakukan substitusi $r = \frac{R}{N}$ atau $rN = R$ sehingga $N\frac{dr}{dt} = \mathrm{qNr} - \mu\mathrm{Nr}$ maka $\frac{dr}{dt} = \mathrm{qr} - \mu\mathrm{r}$, karena $r(t)$ monoton turun pada interval $t \in [t_1, t_2] \subset [0, \infty)$ dapat diasumsikan bahwa $r(t)$ monoton naik. Sehingga penyelesaiannya adalah

$$\frac{dr}{dt} = \mathrm{qr} - \mu\mathrm{r}$$
$$\int \frac{dr}{r} = \int (q-\mu)dt$$
$$r = Ce^{(q-\mu)t}.$$

Selanjutnya ditentukan nilai konstanta C dengan $t = 0$ sehingga

$$r(0) = Ce^{(q-\mu)0}$$
$$C = r(0).$$

Kemudian nilai C disubstitusikan ke $i(t)$ sehingga

$$r(t) = r(0)e^{(q-\mu)t}.$$

Ini berarti untuk $t = 0$,

$$i(t) = i(0) \neq 0,$$

sedangkan untuk $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty}\left(r(0)e^{(q-\mu)t}\right)$$

sehingga $i(t)$ untuk $t \in R^+$ yang merupakan penyelesaian positif dan dapat dikatakan bahwa pada interval waktu $t \in [t_1, t_2] \subset [0, \infty)$ subpopulasi *recovered* monoton naik.

Berdasarkan model *SIR* tersebut, setiap perubahan subpopulasi terhadap waktu (t) ada yang monoton naik dan monoton turun. Sedemikian hingga model tersebut memiliki aliran sistem dinamis.

3 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian tersebut, diperoleh bahwa model *SIR* mempunyai penyelesaian dan tunggal, serta solusi penyelesaiannya positif dan aliran sistem tersebut dinamis.

Daftar Pustaka

[1] Fredlina, K.Q dan Oka, B. T. 2012. Model SIR Untuk Penyakit Tuberkulosis. *E-journal matematika*. 1(1).

[2] Hariyanto, W. Basuki, Budiantara, I Nyoman. 2013. The construction of model Pre-Coalition between H1N1-p and H5N1 Influenza Virus in Indonesia. *Applied Mathematical Science*. Hikari Ltd. 7: 4899-4907.

[3] Saputra, R. K. 2014. Analisis Dinamik Model SIS dengan Laju Kelahiran dan Kematian yang Dipengaruhi Total Populasi. *Journal matematika UB*. matematika.studentjournal.ub.ac.id