Jurnal UJMC, Volume 3, Nomor 1, Hal. 1 - 6
pISSN : 2460-3333 eISSN : 2579-907X

TEOREMA WEYL UNTUK OPERATOR HYPONORMAL

Gunawan[1]

[1]Universitas Muhammadiyah Purwokerto, gun.oge@gmail.com

Abstract This paper aims at describing the natures of Hyponormal operator to secure the existence of Weyl's theorem. The discussion on Weyl's theorem requires definitions of compact, Fredhlom, and Weyl's operator. In addition, samples and natures of compact and Fredhlom operator in Hilbert space will also be observed.

Keywords: *compact operator, Fredhlom operator, Hyponormal operator, Weyl's theorem*

Abstrak Pada artikel ini akan dibahas mengenai sifat operator hyponormal untuk menjamin keberadaaan teorema Weyl. Pembahasan mengenai teorema Weyl memerlukan definisi operator kompak, operator Fredhlom, dan Operator Weyl. Selain itu, akan dibahas contoh dan sifat- sifat operator kompak dan operator Fredhlom pada ruang Hilbert.

Kata kunci: *operator kompak, operator Fredhlom, operator hyponormal, dan teorema Weyl*

1 Pendahuluan

Diberikan ruang Hilbert H atas lapangan $\mathbb{C}$, himpunan semua operator linear terbatas dari H ke H ditulis $B(H)$, dan $T \in B(H)$. Ruang null T dan range T masing- masing dituliskan $N(T)$ dan $R(T)$. Operator T dikatakan Fredholm jika $R(T)$ tertutup, $N(T)$, $R(T)^{\perp}$ masing- masing berdimensi hingga. Indeks operator Freedholm T didefinisikan $i(T) = \dim(N(T)) - \dim(R(T)^{\perp})$. Operator T dikatakan Weyl jika indeks (T) = 0 dan T operator Fredhlom. Operator T dikatakan memenuhi teorema Weyl jika

$$\sigma(T) \setminus \omega(T) = \pi_{00}(T)$$

dengan $\sigma(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left(T - \lambda I\right)^{-1} \text{ tidak ada}\right\}$, $\omega(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda) \text{ tidak Weyl}\}$, dan $\pi_{00}(T) = \{\lambda \in \text{iso } \sigma(\text{T}) : 0 < \alpha(T - \lambda) < \infty\}$.

Selanjutnya, operator T dikatakan hyponormal jika $T^{*}T \geq TT^{*}$ dengan dengan T^{*} adjoint operator T. Pembahasan mengenai sifat operator hyponormal untuk teorema Weyl pada tulisan ini, lebih ditekankan pada menentukan dan membuktikan teorema-teorema yang berkaitan dengan topik. Pembahasan mengenai teorema Weyl memerlukan definisi operator kompak, operator Fredhlom, dan operator Weyl. Rumusan masalah yang dibuat adalah bagaimana sifat teorema Weyl untuk operator hyponormal. Dalam penelitian ini hanya dibatasi pada ruang Hilbert. Tujuan penelitian ini adalah untuk memberikan pemahaman dan pengetahuan mengenai sifat teorema Weyl untuk operator hyponormal. Pembahasan mengenai operator teorema Weyl dan operator hyponormal pada ruang Hilbert bermanfaat membantu mengembangkan ilmu matematika dan aplikasinya, khususnya analisis fungsional.

Pembahasan mengenai teorema Weyl untuk operator hyponormal pada ruang Hilbert diawali dengan pendefinisian operator Weyl. Dalam pendefinisian operator Fredhlom, operator Weyl, dan teorema Weyl diacu dari [2], [4], dan [6]. Untuk pendefinisian tentang operator hyponormal dan operator kompak pada ruang Hilbert diacu dari [1] dan [5]. Selanjutnya, dalam pembahasan mengenai sifat-sifat teorema Weyl untuk operator hyponormal pada ruang Hilbert diacu dari [3].

2 Hasil dan Pembahasan

Pada bab ini dibahas tentang definisi operator kompak, operator Fredhlom, operator Weyl, teorema Weyl, dan operator hyponormal pada ruang Hilbert serta contoh dan teorema yang berkaitan dengan topik penelitian. Terlebih dahulu akan disampaikan mengenai definisi operator kompak pada ruang Hilbert.

2.1 Operator Kompak Pada Ruang Hilbert

Definisi 1. *Diberikan H ruang Hilbert dan $W \subseteq H$. Himpunan W dikatakan kompak jika untuk setiap barisan $(x_n) \subseteq W$, terdapat barisan bagian yang konvergen di W.* [1]

Definisi 2. *Diberikan H ruang Hilbert dan $T \in B(H)$. T disebut operator kompak jika untuk setiap himpunan $M \subseteq H$ terbatas, berlaku $\overline{T(M)}$ kompak. $\overline{T(M)}$ menyatakan himpunan semua titik klosur T(M).* [1]

Contoh 1. Didefinisikan operator $T : \ell^2 \to \ell^2$ dengan untuk setiap $x \in \ell^2$, $T(x) = y, x = (x_j)$ dan $y = \left(\frac{x_j}{j}\right), j = 1,2,3,...$. Selanjutmya, untuk setiap n didefinisikan operator $T_n : \ell^2 \to \ell^2$ dengan untuk setiap $x \in \ell^2$, $T_n(x) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ..., \frac{x_n}{n}, 0, 0, ...\right)$. [5]

Akan ditunjukkan T_n terbatas dan konvergen. Jelas, T_n terbatas karena $\|T_n(x)\| < \infty, \forall x \in \ell^2.$ Lebih lanjut, untuk setiap $x \in \ell^2$:

$$\|(T - T_n)(x)\| = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}|x_j|^2 \leq \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{j=n+1}^{\infty}|x_j|^2 \leq \frac{\|x\|^2}{(n+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sup\left\{\|(T - T_n)(x)\| : \|x\| \leq 1\right\} \leq \sup\left\{\frac{\|x\|^2}{(n+1)^2} : \|x\| \leq 1\right\}$$

$$\Leftrightarrow \|(T - T_n)\| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Menurut sifat Archimedes, untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ berakibat:
$\|T - T_n\| < \varepsilon$. Jadi, $T_n \to T, n \to \infty.$ Dengan demikian, barisan (T_n) konvergen. Hal ini menunjukkan $\overline{T(\ell^2)}$ kompak. Dengan demikian, T merupakan operator kompak.

2.2 Operator Fredhlom, Operator Weyl, dan Teorema Weyl

Definisi 3. *Diberikan H ruang Hilbert dan* $T \in B(H)$. *Operator* T *dikatakan Fredholm jika R(T) tertutup,* $\dim(N(T)) < \infty$, dan $\dim(R(T)^{\perp}) < \infty$.[6]

Contoh 2. Didefinisikan operator $T : \ell^2 \to \ell^2$ dengan untuk setiap $x \in \ell^2$, $T(x) = T(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_1, x_2, x_3, ...)$ $, x = (x_1, x_2, x_3, ...)$. Akan ditunjukkan:

1. R(T) tertutup
2. dim N(T)< ∞
3. $\dim(R(T)^{\perp}) < \infty$

Penyelesaian:

1. Jelas bahwa $R(T) \subseteq \overline{R(T)}$. Diambil sebarang $y \in \overline{R(T)}$ berarti untuk setiap bilangan $r > 0$ berlaku $B(y,r) \cap R(T) \neq \varnothing$. Berarti terdapat $p \in B(y,r)$ dan $p \in R(T)$. Hal ini berarti p = y. Dengan demikian, $y \in R(T)$. Jadi, *R(T)* tertutup
2. Diperoleh $N(T) = \{0\}$. Jadi, dim N(T) = 1 < ∞
3. Diperoleh $R(T)^{\perp} = \{0\}$. Jadi, dim N(T) = 1 < ∞

Berdasarkan 1, 2, dan 3, *T* merupakan operator Fredhlom. [6]

Selanjutnya, akan dibahas beberapa teorema operator kompak dan operator Fredhlom.

Teorema 1. *Jika* $T \in B(H)$ *Fredhlom, maka Im (T) tertutup*. [4]

Bukti: Dibentuk $\hat{T} = T|_{N(T)^{\perp}}$. Artinya $\hat{T} = T : N(T)^{\perp} \to H$. Karena T terbatas maka $\hat{T}$ terbatas. Karena T Fredhlom, maka dimisalkan $\dim(R(T)^{\perp}) = n$. Dibentuk operator linier $S : \mathbb{C}^n \to H$. Selanjutnya, didefinisikan $T_1 : (N(T)^{\perp} \oplus \mathbb{C}^n) \to H$ dengan $T_1(x + y) = \hat{T}(x) + S(y), \forall (x,y) \in N(T)^{\perp} \times \mathbb{C}^n$. Diperoleh T_1Nbijektif dan kontinu. Menurut teorema graph tertutup, T_1^{-1} terbatas dan kontinu. Dengan demikian, $\operatorname{Im} T = T_1(N(T)^{\perp} \oplus 0)$ tertutup.

Teorema 2. *Jika* T bijektif dan $\mathrm{K} \in B(H)$ kompak, *maka T + K operator Fredhlom*. [4]

Selanjutnya, akan disampaikan mengenai definisi operator kompak dan teorema Weyl.

Definisi 4. *Diberikan H ruang Hilbert dan* $T \in B(H)$. *Operator* T *dikatakan Weyl jika indeks (T) = 0 dan T operator Fredhlom*. [4]

Definisi 5. Diberikan *H* ruang Hilbert dan $T \in B(H)$. Operator T dikatakan memenuhi teorema Weyl jika $\sigma(T) \setminus \omega(T) = \pi_{oo}(T)$ dengan $\sigma(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1} \text{ tidak ada}\right\}$, $\omega(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda) \text{ tidak Weyl}\}$, dan $\pi_{oo}(T) = \{\lambda \in \text{iso } \sigma(\mathrm{T}) : 0 < \alpha(T - \lambda) < \infty\}$. [2]

2.3 Operator Hyponormal

Berikut ini akan disampaikan definisi operator hyponormal beserta contohnya pada ruang Hlbert.

Definisi 6. *Diberikan H ruang Hilbert dan $T \in B(H)$. Operator T dikatakan hyponormal jika $T^*T \geq TT^*$ dengan dengan T^* adjoint operator T.* [1]

Contoh 3. Didefinisikan operator $T : R^2 \to R^2$ dengan $T(\bar{x}) = (x_1 - 2x_2, 2x_1 + x_2)$ untuk setiap $\bar{x} \in R^2$. [1] Diperhatikan bahwa:

$$T(\bar{x}) = (x_1 - 2x_2, 2x_1 + x_2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Jadi diperoleh $T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Dengan demikian, diperoleh pula $T^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

1) $T^*T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.
2) $TT^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Diperoleh $T^*T = TT^*$. Artinya, $T^*T \geq TT^*$. Dengan demikian, T merupakan operator hyponormal.

2.4 Sifat Teorema Weyl untuk Operator Hyponormal

Teorema 3. *Diberikan $T \in B(H)$. Jika T hyponormal maka $\omega(T)$ ada pada $\sigma(T)$ kecuali di nilai eigen terasing pada $\sigma(T)$.* [3]

Bukti : Karena T hyoponormal maka T operator Fredholm. Karena indeks (T) = dim N(T) – dim N(T*)= 0 dan T operator Fredhlom, maka menurut Definisi 4, T merupakan operator Weyl. Karena T operator Fredhlom, maka menurut Definisi 3, $R(T)$ tertutup, $\dim(N(T)) < \infty, \dim(R(T)^{\perp}) < \infty$.

Perhatikan bahwa.

Karena T hyponormal maka untuk setiap $x \in H$

$$\|T(x)\| \geq \|T^*(x)\|$$

Diambil sebarang $x \in N(T)$ berarti $T(x) = 0$. Karena T hyponormal maka $T(x) = T^*(x)$. Jadi, $T^*(x) = 0$. Artinya, $x \in N(T^*)$. Selanjutnya, akan ditunjukan $N(T^*) = R(T)^{\perp}$. Diambil sebarang $x \in N(T^*)$ berarti $T^*(x) = 0$. Untuk sebarang $y \in R(T)$, $\langle x, y \rangle = \langle x, T^*(x) \rangle = \langle x, T(x) \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$.

Dengan demikian, $x \in R(T)^{\perp}$. Diambil sebarang $x \in R(T)^{\perp}$, $\langle x, y \rangle = 0, \forall y \in R(T)^{\perp}$. Diperoleh, $x = 0$ atau $y = 0$. Untuk $y = 0$, terdapat $x \in H$, sehingga $T(x) = y = 0$. Diperoleh, $T(x) = 0$. Karena T hyponormal maka $T(x) = T^*(x)$. Jadi, $T^*(x) = 0$. Dengan demikian, $x \in N(T^*)$. Jadi, $N(T) \subseteq N(T^*) = R(T)^{\perp}$. Selanjutnya, akan ditunjukkan $N(T) = R(T)^{\perp}$. Diambil sebarang $x \in N(T)$ berarti $T(x) = 0$. Untuk

sebarang $y \in R(T)$, $\langle x, y \rangle = \langle x, T(x) \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$. Dengan demikian, $x \in R(T)^{\perp}$. Selanjutnya, Diambil sebarang $x \in R(T)^{\perp}$, $\langle x, y \rangle = 0, \forall y \in R(T)^{\perp}$. Diperoleh, $x = 0$ atau $y = 0$. Untuk $y = 0$, terdapat $x \in H$, sehingga $T(x) = y = 0$. Diperoleh, $T(x) = 0$. Dengan demikian, $x \in N(T)$. Jadi, terbukti bahwa $N(T) = R(T)^{\perp}$.
Diambil $0 \in \mathbb{C}, T - \lambda I = T - 0I = T$. Jadi, 0 merupakan nilai eigen terasing yang menyebabkab T Weyl. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa $\omega(T)$ ada, kecuali di nilai eigen terasing pada $\sigma(T)$.

3 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas, kesimpulan yang dapat diambil adalah untuk sebarang operator hyponormal pada ruang Hilbert memberikan sifatnya untuk keberadaan teorema Weyl. Hubungan antara operator kompak, operator hyponormal, operator Fredhlom, operator Weyl, dan teorema Weyl dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\text{Operator Kompak dan Hyponormal} \to \text{Operator Fredhlom} \to \text{Operator Weyl} \to \text{Teorema Weyl}$$

Dalam tulisanini, penulis hanya membahas mengenai sifat-sifat teorema Weyl untuk operator hyponormal pada ruang Hilbert. Untuk penelitian selanjutnya, diharapkan dapat menyelidiki sifat- sifat teorema Weyl pada operator lain misalnya pada operator hyponormal-*p*, untuk $p > 0$ pada ruang Hilbert.

Daftar Pustaka

[1] Berberian, S.K.1961. *Introduction to Hilbert Spaces*. Oxford University Press. New York.
[2] Berberian, S.K. 1970. The Weyl Spectrum of an Operators . *Indian Univ. Math J.* 20: 529-544.
[3] Coburn, L.A.1966. Weyl's Theorem for Nonnormal Operators. *Michigan Math. J.* 13: 285-288
[4] Frantzen, C. 2012. *Fredholm Operators*.
[5] Kreyszig, E.1978. *Introductory Functional Analysis with Applications.*John Wiley and Sons. New York.
[6] Sinnamon, C. 2009. *A one Lecture Introduction to Fredhlom Operators.*