Jurnal UJMC, Volume 2, Nomor 1, Hal. 36 - 40
pISSN : 2460 - 3333 eISSN : 2579-907X

APLIKASI METODE PANGKAT DALAM MENGAPROKSIMASI NILAI EIGEN KOMPLEKS PADA MATRIKS

Novita Eka Chandra[1] dan Wiwin Kusniati[2]

[1] Universitas Islam Darul 'Ulum Lamongan, novitaekachandra@gmail.com,
[2] Universitas Islam Darul 'Ulum Lamongan, wiwin.kusniati@yahoo.co.id

Abstract. Power method is a method of iterations to find the eigenvalues in the matrix. Based on previous research has been conducted to find of application the power method eigenvalues in the matrix. However, in these studies is limited to real eigenvalues . In this study , power method applied to find the complex eigenvalues of a matrix . With the help of Matlab program in accordance with the results obtained using the results of manual workmanship . From the results, it can be conclusion that the power method can be applied to find the complex eigenvalues in a matrix.

Keywords: *matrix , eigenvalues , complex value , the power method.*

Abstrak. Metode pangkat merupakan metode iterasi untuk mencari nilai eigen pada sebuah matriks. Berdasarkan penelitian terdahulu telah dilakukan aplikasi metode pangkat untuk mencari nilai eigen pada sebuah matriks. Akan tetapi dalam penelitian tersebut terbatas untuk nilai eigen real. Pada penelitian ini, metode pangkat diaplikasikan untuk mencari nilai eigen kompleks pada sebuah matriks. Dengan menggunakan bantuan program Matlab didapatkan hasil yang sesuai dengan hasil menggunakan pengerjaan manual. Berdasarkan hasil tersebut, dapat disimpulkan bahwa metode pangkat dapat diaplikasikan untuk mencari nilai eigen kompleks pada sebuah matriks.

Kata Kunci: *matriks, nilai eigen, bilangan kompleks, metode pangkat.*

1 Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak permasalahan dari fenomena real yang dapat dijelaskan melalui pembentukan model matematika. Dalam banyak kasus, tidak semua model matematika tersebut dapat diselesaikan secara mudah dengan menggunakan metode analitik [?], sehingga digunakan metode numerik untuk mencari penyelesaiannya. Salah satu metode dalam analisis numerik yang bisa digunakan untuk mencari nilai eigen yaitu metode pangkat.

Dalam mencari nilai eigen menggunakan metode pangkat (*power method*) ini, semakin kecil nilai *error* yang diberikan menyebabkan semakin banyak iterasi yang terjadi, sehingga semakin baik hasil yang diperoleh. Sebelumnya [3] melakukan penelitian mencari nilai eigen dengan metode pangkat. Akan tetapi, dengan menggunakan metode pangkat tersebut hanya terbatas pada matrik yang semua nilai eigennya bilangan real. Dalam aplikasinya metode numerik sering digunakan untuk mencari solusi permasalahan dengan solusi yang real. Pada penelitian ini, penulis menggunakan metode pangkat untuk mencari nilai eigen pada sebuah matriks yang nilai eigennya merupakan bilangan kompleks.

2 Kajian Teori

2.1 Matriks

Menurut [2], matriks didefinisikan sebagai susunan persegi panjang dari bilangan - bilangan yang diatur dalam baris dan kolom. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan elemen dalam matriks. Matriks ditulis sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

2.2 Bilangan Kompleks

Secara umum bilangan kompleks ini terdiri dari dua bagian yaitu bilangan real dan imajiner (khayal). Bagian khayal bercirikan hadirnya bilangan khayal i yang didefinisikan sebagai $i = \sqrt{(-1)}$.

2.3 Vektor Eigen dan Nilai Eigen

Definisi 1. *Jika A adalah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol x di dalam $\mathbf{R}^n$, dinamakan vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yakni*

$$Ax = \lambda x.$$

Untuk suatu skalar λ yang dinamakan nilai eigen dari A. Dalam hal ini dikatakan x adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.

2.4 Metode Pangkat

Metode pangkat adalah suatu metode iteratif untuk mendapatkan nilai eigen dominan dari suatu matriks dan vektor eigennya [1]. Bentuk dari metode angkat tersebut adalah :

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 \\ x_2 &= Ax_1 = A(Ax_0) = A^2 x_0 \\ x_k &= Ax_(k-1) = A(A^(k-1)x_0) = A^k x_0. \end{aligned}$$

Pada tulisan ini menggunakan 4 macam metode, yaitu:

1. Metode pangkat langsung
   Algoritma dalam metode ini sebagai berikut:
   (a) Jika matriks A berukuran $n \times n$, maka tentukanlah sebuah matriks $x^{(0)}$ yang berukuran $n \times 1$ dan bukan matriks nol.
   (b) Carilah nilai $y^{(1)}$ yang memenuhi perkalian matriks $Ax^{(0)} = y^{(1)}$
   (c) Bagi matriks $y^{(1)}$ dengan elemen matriks tersebut yang harga mutlaknya terbesar yaitu $\lambda^{(1)}$ sehingga didapatkan $y^{(1)} = \lambda^{(1)} x^{(1)}$

(d) Ulangi langkah b dan c dengan $x^k = x^{k+1}$ untuk $k = 0, 1, 2, 3,$ sampai suatu iterasi yang menunjukkan bahwa nilai $\lambda^k \approx \lambda^{k+1}\lambda^{k+1}$ merupakan nilai eigen mutlak terbesar dari matriks tersebut, sedangkan $x^{(k+1)}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ^{k+1}

2. Metode pangkat invers
   Algoritma dalam metode ini sebagai berikut:
   (a) Carilah matriks L dan U yang memenuhi persamaan $LU = A$ dengan menggunakan metode Doolittle LU.
   (b) Tentukan matriks $x^{(0)}$ yang bukan matriks nol.
   (c) Carilah x' yang memenuhi perkalian $Lx' = x^{(0)}$
   (d) Carilah y' yang memenuhi perkalian $Uy^{(1)} = x'$
   (e) Bagi $y^{(1)}$ dengan elemen $y^{(1)}$ yang terbesar (dalam harga mutlak) agar diperoleh $y^{(1)} = \lambda^{(1)}_{inverse} x^{(1)}$.
   (f) Ulangi langkah c sampai e dengan $x^k = x^{k+1}$ untuk $k = 0, 1, 2, 3,$. Iterasi dilakukan sampai nilai x konvergen. Pada saat konvergen, $\lambda = \frac{1}{\lambda_{inverse}}$ adalah nilai eigen yang dicari dan $x^{(k+1)}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian.
3. Metode pangkat yang diubah
   Algoritma dalam metode ini, sebagai berikut:
   (a) Mencari nilai eigen mutlak terbesar dengan metode pangkat langsung, $\lambda_{Largest}$.
   (b) Mengurangkan semua elemen diagonal utama matriks A dengan $s = \lambda_{Largest}$ untuk memperoleh matriks $A_{shifted}$.
   (c) Mencari nilai eigen terbesar ($\lambda_{shifted}$) dari matriks $A_{shifted}$ dengan metode pangkat langsung.
   (d) Menghitung nilai eigen tak dominan dari matriks A yaitu $\lambda = \lambda_{shifted} + s$.
4. Metode pangkat invers yang diubah
   Algoritma dalam metode ini, sebagai berikut:
   (a) Buatlah nilai tebakan awal λ_{Guess} untuk nilai eigen menengah.
   (b) Kurangi seluruh elemen diagonal utama dari matriks A dengan $s = \lambda_{Guess}$ untuk memperoleh $A_{shifted}$.
   (c) Carilah nilai $\lambda_{(shifted,inverse)}$ dari matriks $A_{shifted}$ dengan metode pangkat invers.
   (d) Hitung nilai $\lambda_{shifted} = \frac{1}{\lambda_{(shifted,inverse)}}$
   (e) Hitung nilai $\lambda_{Inter} = \lambda_{shifted} + s$.

3 Pembahasan

Penulis mengambil contoh sebuah matriks berordo 2×2, kemudian dicari nilai eigen mutlak terbesar dan vektor eigen yang bersesuaian dengannya pada matriks tersebut menggunakan 4 metode yaitu metode pangkat langsung, metode pangkat invers, metode pangkat yang diubah dan metode pangkat invers yang diubah pada galat 0,1. Berikut ini matriks yang digunakan.

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 3i & 2-i \\ 2-i & -2i \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Dari matriks Persamaan 1 dilakukan analisis secara manual dengan menggunakan algoritma pada keempat metode pangkat pada sub bab 2.4. Selanjutnya, disimulasikan dengan menggunakan program Matlab. Untuk validasi keabsahannya akan dilihat dari kesesuaian antara hasil simulasi menggunakan program Matlab dengan pengerjaan manual. Hasil simulasi dari penelltian ini dapat dilihat pada tabel-tabel berikut:

Tabel 1: Hasil Iterasi Metode Pangkat Langsung dengan Matlab

$Iterasi(k)$	$\lambda^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0	$2+i$	$2+i$
1	$7+4i$	$-0,1538+0,7692i$	1
2	$-0,3077+1,4615i$	1	$0,1379+0,3448i$
3	$0,6207-3,5517i$	1	$-0,2202-0,7958i$
4	$-1,2361-1,6286i$	1	$-0,3388+0,0063i$
5	$-0,6713-3,3515i$	1	$-0,2081-0,5588i$
6	$-0,9751-2,0904i$	1	$-0,3911-0,2397i$
7	$-1,0218-2,9117i$	1	$-0,2298-0,4416i$
8	$-0,9012-2,3466i$	1	$-0,3600-0,3377i$
9	$-1,0576-2,6846i$	1	$-0,2586-0,3916i$
10	$-0,9087-2,4754i$	1	$-0,3309-0,3701i$

Berdasarkan Tabel 1 dapat diketahui bahwa nilai eigen terbesar dari matriks A dengan galat 0,1 pada iterasi ke-10 adalah $-0,9087-2,4754i$ dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut yaitu:

$$x^{(10)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,3309-0,3701i \end{bmatrix}.$$

Tabel 2: Hasil Iterasi Metode Pangkat Invers dengan Matlab

$Iterasi(k)$	$\lambda^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0	$2+i$	$2+i$
1	$-2i$	$0,5i$	1
2	$-0,26-0,32i$	$0,5882+0,3529i$	1
3	$0,2776-0,5906i$	$0,1381+0,3757i$	1
4	$0,3036-0,3906i$	$0,4152+0,4097i$	1
5	$0,2665-0,5099i$	$0,2301+0,3449i$	1
6	$0,3099-0,4337i$	$0,3416+0,4075i$	1
7	$0,2734-0,4777i$	$0,2763+0,3497i$	1

Berdasarkan Tabel 2 dapat diketahui bahwa nilai eigen terbesar dari matriks A dengan galat 0,1 pada iterasi ke-7 adalah $0,2734-0,4777i$ dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut yaitu:

$$x^{(7)} = \begin{bmatrix} 0,2763+0,3497i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tabel 3: Hasil Iterasi Metode Pangkat yang Diubah dengan Matlab

$Iterasi(k)$	$\lambda^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0	$2+i$	$2+i$
1	$1,3420-11,8595i$	1	$0,2146-0,5105i$
2	$0,8273-4,2399i$	1	$-0,2014-0,6142i$
3	$-0,1082-4,4483i$	1	$-0,3831-0,4648i$
4	$-0,3223-4,9289i$	1	$-0,3489-0,3572i$
5	$-0,1462-5,1100i$	1	$-0,3018-0,3539i$

Berdasarkan Tabel 3 dapat diketahui bahwa nilai eigen terbesar dari matriks A dengan galat 0,1 pada iterasi ke-5 adalah $-0,1462-5,1100i$ dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut yaitu:

$$x^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,3018-0,3539i \end{bmatrix}.$$

Tabel 4: Hasil Iterasi Metode Pangkat Invers yang Diubah dengan Matlab

$Iterasi(k)$	$\lambda^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0	$2+i$	$2+i$
1	$1,9204+1,4790i$	$0,1658+0,2563i$	1
2	$0,7824-0,0314i$	$0,2684+0,4215i$	1
3	$0,7470-0,0429i$	$0,3173+0,3821i$	1

Berdasarkan Tabel 4 dapat diketahui bahwa nilai eigen terbesar dari matriks A dengan galat 0,1 pada iterasi ke-3 adalah $0,7470-0,0429i$ dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut yaitu:

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,3173+0,3821i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4 Kesimpulan

Berdasarkan hasil kajian dan pembahasan yang telah dilakukan, diperoleh hasil proses simulasi dengan menggunakan bantuan software Matlab sesuai dengan hasil proses pengerjaan manual. Dengan demikian, metode pangkat dapat diaplikasikan untuk mencari nilai eigen kompleks.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H. 1997. *Aljabar Linear Elementer*. Erlangga. Jakarta.

[2] Ayres, F. 1984. *Matriks*. Erlangga. Jakarta.

[3] Farida, N. 2007. *Aplikasi Metode Pangkat dan Metode Deflasi Dalam Mengaproksimasi Nilai Eigen Dan Vektor Eigen Dari Matriks*. UIN Malang. Malang.