Jurnal UJMC, Volume 2, Nomor 1, Hal. 22 - 27
pISSN : 2460 - 3333 eISSN : 2579-907X

ANALISIS PERMAINAN EMPAT BILANGAN

Melisa[1]

Universitas Islam Darul 'Ulum Lamongan, melisa.mathugm@yahoo.com

Abstract. The four-number game starts from 4-tuple (a, b, c, d) of nonnegative numbers a, b, c, d. In this game, the next 4-tuple is $(|a - b|, |b - c|, |c - d|, |d - a|)$ and similar rule of changes of the subsequent 4-tuples is imposed until the game reaches the zero 4-tuple $(0, 0, 0, 0)$. The winner of this game is the one who chooses the initial 4-tuple leading to the longest game. In this paper analyzes the game length based on the following criteria imposed on the four numbers of the 4-tuple: nonnegative integers, nonnegative rationals and nonnegative reals. The results shows that every four-number game with nonnegative integers or rational integers has finite length. Despite of this fact, for every positive integer m, there is an initial 4-tuple based on Tribonacci sequence that leads to four-number game with length greater than m. For the game with real integers, although the game generally has finite length, there are (infinite number of) initial 4-tuples that leads to infinite length games.

Keywords: *four-number game, Tribonacci sequence.*

Abstrak. Permainan empat bilangan dimulai dari urutan-4 awal (a, b, c, d) dari empat bilangan tak negatif a, b, c, d. Permainan ini dilanjutkan ke urutan-4 $(|a-b|, |b-c|, |c - d|, |d - a|)$ dan dengan aturan perubahan urutan-4 yang sama, permainan berhenti setelah diperoleh urutan-4 $(0, 0, 0, 0)$. Pemenang dari permainan ini adalah pemain yang memilih urutan awal dengan permainan yang paling panjang. Dalam tulisan ini, dilakukan analisis panjang permainan empat bilangan berdasarkan beberapa kriteria yang dikenakan pada ke-empat bilangan tak negatif di dalam urutan-4: bilangan bulat tak negatif, bilangan rasional tak negatif, bilangan real tak negatif. Hasil analisis membuktikan bahwa permainan empat bilangan dengan urutan-4 awal berupa bilangan bulat tak negatif atau bilangan rasional tak negatif mempunyai panjang permainan yang berhingga. Walaupun demikian, untuk setiap bilangan bulat positif m, bisa dipilih sebuah urutan-4 awal berdasarkan barisan Tribonacci yang menghasilkan permainan dengan panjang lebih besar dari m. Untuk permainan dengan empat bilangan real, walaupun pada umumnya berhingga, tetapi bisa dipilih (ada tak hingga pilihan) urutan-4 awal yang menghasilkan permainan dengan panjang tak hingga.

Kata Kunci: *permainan empat bilangan, barisan Tribonacci.*

1 Pendahuluan

Permainan empat bilangan telah banyak dibahas oleh ilmuwan yang berbeda, tetapi catatan paling awal dari permainan ini ditulis oleh Enrico Ducci dari Italia pada abad ke-19 [6]. Oleh karena itu, permainan ini kadang-kadang disebut permainan Ducci [1]. Aturan main permainan empat bilangan sangat sederhana dan permainan ini bisa dilakukan oleh siswa matematika sekolah dasar, mahasiswa bahkan orang awam. Walaupun demikian, permainan yang hanya memerlukan perhitungan yang sederhana ternyata memerlukan analisis yang cukup kompleks untuk memprediksi jawabannya.

Permainan dimulai dengan memberi label berupa empat bilangan bulat tak negatif pada keempat sudut kotak persegi awal yakni kotak persegi yang akan menjadi kotak persegi terbesar dan paling luar. Keempat label berupa bilangan bulat tak negatif ini menjadi titik awal permainan. Pada kotak persegi tersebut, diturunkan kotak persegi yang lebih kecil yang titik-titik ujungnya terletak di tengah sisi kotak persegi yang lebih besar. Setiap titik kotak persegi yang lebih kecil diisi dengan nilai mutlak dari selisih kedua bilangan bulat yang terletak pada sisi yang sama, mengapit titik kotak persegi kecil ini.

Dapat dibuktikan bahwa proses menurunkan kotak persegi yang lebih kecil tersebut akan berakhir pada kotak persegi yang semua titik ujungnya berlabel bilangan 0. Lebih jauh, kotak persegi berlabel 0 ini layak menjadi titik akhir karena jika diteruskan, akan selalu diperoleh kotak persegi lebih kecil yang semua titik ujungnya juga berlabel 0. Dalam permainan empat bilangan, pemenangnya adalah pemain yang mendapatkan urutan-4 dari bilangan-bilangan bulat tak negatif yang bisa menghasilkan permainan paling panjang, yaitu permainan yang menghasilkan paling banyak kotak persegi.

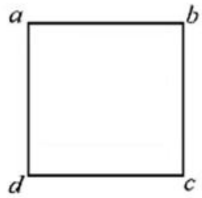
2 Metode Penelitian

Permainan empat bilangan yang dibahas mengenai bilangan bulat, bilangan rasional, bilangan yang memiliki panjang berhingga, bilangan yang memiliki panjang sembarang tapi berhingga, bilangan riil, dan bilangan yang memiliki panjang tak hingga. Permainan empat bilangan ini dilakukan dengan menentukan kriteria pemilihan urutan-4 dari bilangan-bilangan bulat tak negatif secara tepat agar menghasilkan lebih banyak kotak persegi. Kemudian, megeneralisasi permainan tersebut dari urutan-4 bilangan bulat tak negatif ke urutan-4 bilangan rasional tak negatif, bahkan urutan-4 bilangan real tak negatif.

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Permainan Empat Bilangan dengan Bilangan Bulat

Bentuk paling dasar dari permainan bisa digambarkan melalui empat bilangan bulat tak negatif a, b, c, d yang menjadi label dari ke-4 titik-titik ujung sebuah kotak persegi. Kotak persegi ini dengan ke-4 bilangan awal pada setiap sudutnya menjadi "kotak persegi awal". Kotak persegi awal disebut hasil permainan pada langkah 0 dan hasil langkah 0 permainan ini diberi simbol $S_0 = (a, b, c, d)$. S_0 merupakan awal dari seluruh permainan yang disebut permainan-(a, b, c, d).



Gambar 1: Kotak Persegi Awal $S_0 = (a, b, c, d)$

Langkah berikutnya adalah menciptakan sebuah kotak persegi kedua yang berukuran lebih kecil di dalam kotak persegi awal dengan titik-titik sudut persegi kedua merupakan titik-titik tengah dari sisi-sisi kotak persegi sebelumnya. Ke empat label sudut kotak persegi kedua ini adalah nilai mutlak dari selisih dua label bertetangga dari persegi pertama. Secara matematis, persegi kedua ini dilambangkan melalui urutan-4

$$S_1 = (|a-b|, |b-c|, |c-d|, |a-d|). \tag{1}$$

Proses membuat persegi baru terus berlanjut sampai akhirnya diperoleh persegi (terkecil) yang semua label pada setiap titik sudutnya bernilai nol. Pemenang dari permainan ini adalah pemain yang bisa menurunkan permainan yang paling panjang, dimana panjang permainan dihitung mulai dari proses menurunkan kotak persegi berdasarkan kotak persegi awal (langkah pertama) sampai pada kotak persegi yang semua label pada setiap titik sudutnya bernilai nol.

Definisi 1. *Jika urutan-4 awal suatu permainan empat bilangan adalah* $S_0 = (a, b, c, d)$ *dan urutan-4 akhir dari permainan adalah* $S_n = (0, 0, 0, 0)$*, maka panjang permainan didefinisikan sebagai* n*. Panjang permainan dinotasikan sebagai* $L(S_0) = L(a, b, c, d) = n$*.*

Definisi 2. *Dua permainan empat bilangan dengan urutan-4 awal* (a, b, c, d) *dan urutan-4 awal* (e, f, g, h) *dikatakan ekuivalen jika terdapat permutasi* $\sigma \in$ **D4** *sedemikian rupa sehingga* $(e, f, g, h) = (\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c), \sigma(d))$*.*

Jadi, berdasarkan Definisi 2 urutan-4 awal (a, b, c, d) dapat diputar atau dicerminkan pada kotak persegi awal dengan kombinasi dari permutasi **D4** tanpa mempengaruhi panjang dari permainan.

3.2 Permainan Empat Bilangan dengan Bilangan Rasional

Permainan empat bilangan dengan label bilangan rasional tak negatif dimainkan dengan aturan yang sama pada saat label bilangan bulat tak negatif. Misalkan $S_0 = (a_0, b_0, c_0, d_0)$ mewakili kotak persegi awal permainan dan $S_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$ adalah urutan-4 pada langkah ke-i yang dituliskan sebagai

$$S_i = (|a_{i-1} - b_{i-1}|, |b_{i-1} - c_{i-1}|, |c_{i-1} - d_{i-1}|, |a_{i-1} - d_{i-1}|).$$

3.3 Permainan Empat Bilangan dengan Panjang Berhingga

Setiap permainan empat bilangan dengan label bilangan rasional tak negatif memiliki panjang yang berhingga. Selain itu, nilai maksimum untuk panjang dari setiap permainan S dapat dihitung dari nilai-nilai pada label S_0. Untuk membuktikan fakta ini, dibutuhkan lemma berikut.

Lemma 1. *Perkalian dari empat bilangan awal yang rasional tak negatif pada sebuah permainan dengan sebuah bilangan bulat positif* m *tidak mengubah panjang dari permainan.*

Lemma 2. *Jika permainan empat bilangan dengan urutan-4 awal bilangan-bilangan bulat tak negatif memiliki panjang paling sedikit 4, maka semua bilangan yang muncul dari langkah 4 dan seterusnya adalah genap.*

Lemma 3. *Setiap permainan empat bilangan yang dimainkan dengan bilangan bulat tak negatif memiliki panjang hingga. Bahkan, jika A adalah bilangan yang terbesar dari keempat bilangan bulat tak negatif pada urutan-4 awal dan jika k adalah bilangan bulat terkecil sedemikian sehingga $A/2^k < 1$, maka permainan mempunyai panjang paling banyak $4k$.*

Teorema berikut membahas perluasan permainan ke bentuk permainan dengan entri-entri bilangan rasional (bilangan dengan pembilang bulat dan penyebut bulat tak nol).

Teorema 1. *Setiap permainan empat bilangan dengan bilangan rasional tak negatif mempunyai panjang yang berhingga. Sesungguhnya, jika N adalah pembilang terbesar pada urutan-4 awal yang bilangan-bilangannya memiliki penyebut bersama, maka panjang permainan paling banyak $4k$, dimana $N < 2^k$.*

Berdasarkan lemma dan teorema di atas, dapat disimpulkan bahwa permainan empat bilangan dengan bilangan bulat tak negatif dan bilangan rasional tak negatif sebagai urutan-4 awal mempunyai panjang yang berhingga.

3.4 Permainan Empat Bilangan dengan Panjang Sembarang tetapi Berhingga

Untuk menyelidiki permainan empat bilangan dengan panjang yang lebih besar, perhatikan permainan tribonacci. Definisikan sebuah permainan Tribonacci sebagai sebuah permainan empat bilangan yang dimainkan dengan empat barisan Tribonacci berurutan. Barisan Tribonacci t_n didefinisikan sebagai

$$t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 1,$$

dan untuk setiap $n > 1$,

$$t_{n+1} = t_n + t_{n-1} + t_{n-2}.$$

Semakin besar bilangan Tribonacci yang digunakan pada label, maka permainan akan semakin panjang. Selain itu, akan ditunjukkan bahwa dapat dihitung panjang yang tepat dari setiap permainan tribonacci dan dapat dihasilkan permainan yang panjang, tetapi pertama-tama perhatikan beberapa konsep-konsep baru berikut. Aturan terdahulu yang telah dijelaskan sebelumnya pada Persamaan 1 dan aturan baru

$$S_1 = (|a-d|, |a-b|, |b-c|, |c-d|).$$

Kedua aturan ini ekuivalen karena salah satu aturan bisa diperoleh dari rotasi $\rho_1 = (1, 2, 3, 4) \in \mathbf{D4}$.

Untuk setiap n, didefinisikan urutan-4 Tribonacci $T_n = (t_n, t_{n-1}, t_{n-2}, t_{n-3})$. Misalkan diberikan urutan-4 Tribonacci $T_n = (t_n, t_{n-1}, t_{n-2}, t_{n-3})$, maka

$$DT_n = (t_n - t_{n-3}, t_n - t_{n-1}, t_{n-1} - t_{n-2}, t_{n-2} - t_{n-3}),$$

dan langkah ke-k dari permainan dinotasikan D^kT_n. Kemudian digunakan fungsi pembulatan kebawah yang dinotasikan $[r]$ untuk setiap bilangan real r, yakni bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan r.

Lemma 4. *Permainan empat bilangan yang dimulai dengan langkah ketiga dari permainan T_n mempunyai panjang yang sama dengan permainan $2T_{n-2}$ yakni*

$$D^3T_n = 2T_{n-2}.$$

Lemma 5. *Untuk setiap $n \in \mathbf{N}$, $[\frac{n-2}{n}] + 1 = [\frac{n}{2}]$.*

Teorema 2. *Untuk setiap $n \in N$, permainan empat bilangan Tribonacci dengan urutan-4 awal $T_n = (t_n, t_{n-1}, t_{n-2}, t_{n-3})$ mempunyai panjang yaitu*

$$L(T_n) = 3[\frac{n}{2}].$$

Jadi, dengan mempertimbangkan urutan-4 Tribonacci yang awal dengan n yang besar, maka dapat dihasilkan permainan dengan panjang sembarang.

3.5 Permainan Empat Bilangan dengan Bilangan Riil

Pada bilangan riil, diperlukan analisis yang lebih kompleks dan juga diperlukan teori-teori dari aljabar linier. Dalam hal ini, setiap urutan-4 adalah sebuah vektor di **R4**. Lebih jauh, aturan iterasi untuk permainan empat bilangan adalah fungsi $F : \mathbf{R4} \to \mathbf{R4}$ yang didefinisikan sebagai

$$F(a, b, c, d) = (|a - d|, |a - b|, |b - c|, |c - d|).$$

Dalam aljabar linier, fungsi $F : \mathbf{R4} \to \mathbf{R4}$ adalah sebuah transformasi linier jika untuk setiap vektor $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R4}$ dan untuk setiap $r \in \mathbf{R}, F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$ dan $F(r\mathbf{u}) = r(F(\mathbf{u}))$.

Karena aturan transisi dari permainan empat bilangan sekarang digambarkan sebagai sebuah matriks, maka dapat diamati bahwa permainan empat bilangan dengan $\mathbf{s} = (a, b, c, d) \in S$ mempunyai panjang n jika n adalah bilangan bulat terkecil yang memenuhi

$$F^n(\mathbf{s}) = \mathbf{M}^n(\mathbf{s}) = \mathbf{0}.$$

Selain itu, sebuah permainan empat bilangan dengan urutan awal $\mathbf{s}$ mempunyai panjang tak hingga jika untuk setiap $n \in \mathbf{N}$ berlaku

$$F^n(\mathbf{s}) = \mathbf{M}^n(\mathbf{s}) \neq \mathbf{0}.$$

3.6 Permainan Empat Bilangan dengan Panjang Tak Hingga

Misalkan $\mathbf{s}_0 \in S$ adalah sebuah vektor eigen dari $\mathbf{M}$ untuk nilai eigen λ, yaitu

$$F(\mathbf{s}_0) = \lambda\mathbf{s}_0 \neq \mathbf{0}.$$

Dengan menerapkan F lagi, maka disimpulkan

$$F(F(\mathbf{s}_0)) = F(\lambda \mathbf{s}_0) = \lambda F(\mathbf{s}_0) = \lambda^2 \mathbf{s}_0 \neq \mathbf{0}.$$

Secara umum dapat ditulis

$$F^n(\mathbf{s}_0) = \lambda^n \mathbf{s}_0 \neq \mathbf{0}.$$

Teorema 3. *Terdapat tak berhingga permainan empat bilangan yang panjangnya tak hingga.*

4 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembaahasan yang dilakukan, berikut kesimpulan yang diperoleh:

1. Permainan empat bilangan dengan urutan-4 awal berupa bilangan bulat tak negatif dan bilangan rasional tak negatif mempunyai panjang yang berhingga yaitu paling banyak $4k$.
2. Permainan empat bilangan yang dimainkan dengan empat barisan Tribonacci berurutan, panjang permainannya dapat dihitung dengan cepat dan tepat dengan menggunakan rumus $L(T_n) = 3[\frac{n}{2}]$, dimana n adalah suku ke-n barisan Tribonacci.
3. Walaupun secara umum panjang permainan dengan urutan-4 awal berupa bilangan-bilangan real panjangnya berhingga, tetapi terdapat tak hingga permainan empat bilangan yang urutan-4 awalnya berupa empat bilangan-bilangan real yang mempunyai panjang tak hingga.

Daftar Pustaka

[1] Brockman, G., dan Zerr, R. J. 2007. Asymptotic Behavior of Certain Ducci Sequences. *Fibonacci Quarterly.* 45(2):155-163.

[2] Chamberland, M., dan Thomas, D. M. 2004. The N-Number Ducci Game. *Journal of Difference Equations and Applications.* 10(3):33-36.

[3] Anton, H. 2000. *Elementary Linear Algebra; Dasar-Dasar Aljabar Linear Jilid 2.* Terjemahan Ir. Hari Suminto. Interaksara. Batam.

[4] Spickerman, W.R. 1982. Binet's Formula for the Tribonacci Sequence. *Fibonacci Quart.* 20:118-120.

[5] Webb, W. 1982. The Length of the Four-Number Game. *Fibonacci Quart.* 20:33-35.

[6] http://wordplay.blogs.nytimes.com/tag/tribonacci-constant/. Diakses pada tanggal 7 Oktober 2011.

[7] http://mathworld.wolfram.com/TribonacciNumber.html. Diakses pada tanggal 10 Oktober 2011.