Jurnal UJMC, Jilid 1, No 1, Hal. 47-54
ISSN : 2460-3333

SISTEM ANTRIAN MODEL GEO/G/1 DENGAN *VACATION*

Novita Eka Chandra[1], Supriyanto[2], dan Renny[3]

[1] Universitas Islam Darul 'Ulum Lamongan, novitaekachandra@gmail.com
[2] Universitas Jenderal Soedirman, supriyanto_unsoed@yahoo.com
[3] Universitas Jenderal Soedirman, renny.unsoed@gmail.com

Abstract. Queue processes are stochastic processes which involve the arrival process and the service process. In a queue, there is a condition of servers that become unavailable for a period of time called vacation. The purpose of this research is to analyze the derivation Geo/G/1 queue systems model with vacation and its application. Furthermore, based on simulation on vacation model, with different values of traffic intensity and vacation parameter, we concluded that the bigger traffic intensity and vacation parameter values, then the mean of total number of costumers in a system and the mean of waiting time in the queue that is caused by vacation will be decreased.

Keywords: *queue system, vacation, traffic intensity, vacation parameter.*

Abstrak. Proses antrian adalah proses stokastik yang melibatkan proses kedatangan dan proses pelayanan. Dalam suatu antrian, terdapat suatu keadaan tidak tersedianya pelayanan untuk beberapa waktu tertentu yang disebut *vacation*. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji penurunan sistem antrian model Geo/G/1 dengan *vacation* dan aplikasinya. Selanjutnya, berdasarkan simulasi pada model dengan *vacation*, yaitu dengan nilai *traffic intensity* dan parameter *vacation* yang berbeda, didapatkan kesimpulan yaitu semakin besar nilai *traffic intensity* dan parameter *vacation*, mengakibatkan semakin berkurang ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem dan ekspektasi waktu tunggu pelanggan dalam antrian akibat adanya *vacation*.

Kata Kunci: *sistem antrian, vacation, traffic intensity, parameter vacation.*

1 Pendahuluan

Sistem antrian merupakan keseluruhan dari proses para pelanggan atau barang yang berdatangan dan memasuki barisan antrian yang seterusnya mendapatkan pelayanan [5]. Dalam sistem antrian ada beberapa komponen dasar yang harus diperhatikan, salah satunya yaitu bentuk kedatangan pelanggan dan bentuk pelayanan. Pada model antrian, bentuk kedatangan dan bentuk pelayanan dapat dinyatakan dalam distribusi peluang tertentu [5]. Distribusi yang umumnya digunakan dalam antrian adalah distribusi kontinu yaitu distribusi Poisson dan distribusi Eksponensial untuk pola kedatangan dan pelayanan. Selain distribusi kontinu, ada distribusi diskrit yang dapat digunakan dalam antrian, salah satunya yaitu distribusi Geometrik.

Dalam suatu sistem antrian, terdapat suatu keadaan tidak terjadi pelayanan untuk beberapa waktu tertentu. Keadaan ini disebut *vacation*. Beberapa contoh yang dapat menggambarkan keadaan tersebut seperti, pelayan yang sedang sibuk, sejumlah mesin yang memerlukan perawatan atau perbaikan pada periode tertentu, atau pelayan sedang istirahat.

Dalam [11], Takagi menjelaskan mengenai sistem antrian model Geo/G/1 dengan *vacation*. Sistem antrian model Geo/G/1 adalah sistem antrian yang memiliki pola kedatangannya berdistribusi Geometrik, pola pelayanannya berdistribusi umum, dan pelayanan tunggal. Dengan adanya *vacation* dalam sistem antrian model Geo/G/1, menjadikan sistem antrian lebih realistis dan fleksibel dalam kehidupan nyata. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji mengenai sistem antrian model Geo/G/1 dengan *vacation*.

2 Sistem Antrian Model Geo/G/1

Pada sistem antrian model Geo/G/1, kedatangan pelanggan diasumsikan terjadi pada waktu diskret yaitu pada saat $t = 0, 1, 2, ...$ dikarenakan kedatangan pelanggan terjadi sebelum adanya pelayanan. Waktu antar kedatangan (T) merupakan variabel random yang bersifat independen dan terdistribusi secara identik mengikuti distribusi Geometrik dengan parameter p memiliki fungsi peluang (pmf) a_j. Selanjutnya, banyaknya kedatangan terjadi pada interval $[0, n]$, dinotasikan dengan C_n, mengikuti distribusi Binomial dengan parameter (n, p) dengan pmf d_j. Serta, waktu pelayanan (S) merupakan variabel random yang bersifat independen dan identik mengikuti distribusi umum, dengan pmf g_j. Dengan demikian, espektasi dan fungsi pembangkit (pgf) dari waktu pelayanan adalah

$$E(S) = \sum_{j=1}^{\infty} j g_j, j \geq 1$$

$$G(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z^j g_{j,j\geq 1}.$$

Misalkan A adalah jumlah pelanggan yang datang selama waktu pelayanan, maka probabilitas dari A yaitu

$$P(A = j) = f_j = \sum_{k=j}^{n} g_k d_j, j \geq 0 \tag{1}$$

dengan $A(z)$ merupakan bentuk pgf dari Persamaan 1 atau peluang dari jumlah pelanggan yang datang selama waktu pelayanan, yaitu

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} z^j f_j \\ &= G(1 - p(1 - z)). \end{aligned} \tag{2}$$

Selanjutnya, ekspektasi jumlah kedatangan pelanggan selama waktu pelayanan yaitu

$$\begin{aligned} E(A) &= \sum_{j=0}^{n} j f_j \\ &= \sum_{k=0}^{n} g_k (kp) \\ &= pE(S) \\ &= \rho \end{aligned} \tag{3}$$

dengan ρ disebut *traffic intensity* dari sistem.

Misalkan L_n adalah jumlah pelanggan dalam sistem pada saat pelanggan ke-n meninggalkan sistem. Dengan demikian,

$$L_{n=1} = \begin{cases} L_n - 1 + A, & L_n \geq 1 \\ A, & L_n = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Karena $\{L_n, n \geq 1\}$ adalah rantai Markov, maka dapat diperoleh ekspektasi untuk L_{n+1}, yaitu

$$\begin{aligned} E(L_{n+1}) &= E(L_n - 1) + E(A) \\ &= E(L_n - 1) + \rho. \end{aligned} \tag{5}$$

Kemudian, dengan mengansumsikan bahwa L_n stasioner, maka dari Persamaan 5 diperoleh

$$\begin{aligned} E(L) &= E(L) - (1 - p_0) + \rho \\ p_0 &= 1 - \rho. \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan 4, diperoleh peluang dari jumlah pelanggan dalam sistem, yaitu

$$L(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)G(1-p(1-z))}{G(1-p(1-z)) - z} \tag{6}$$

Peluang dari jumlah pelanggan dalam sistem sama dengan peluang dari jumlah kedatangan selama waktu pelayanan dan waktu tunggu pelanggan dalam antrian yaitu

$$L(z) = W(1-p(1-z))G(1-p(1-z)).$$

Akibatnya, diperoleh

$$W(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)}{(1-z) - p(1-G(z))}. \tag{7}$$

Selanjutnya, Persamaan 4 didefinisikan sebagai

$$L_{n+1} = \begin{cases} L_n - \delta + A, & L_n \geq 1 \\ A, & L_n = 0 \end{cases} \tag{8}$$

dengan

$$\delta = \begin{cases} 1, & L_n \geq 1 \\ 0, & L_n = 0 \end{cases}$$

Dari Persamaan 8, dapat diperoleh ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem, yaitu

$$E(L) = \frac{p^2 E(S(S-1))}{2(1-\rho)} + \rho. \tag{9}$$

Selanjutnya, untuk menentukan ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian $(E(Q))$ sama dengan ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem dikurangi ekspektasi jumlah kedatangan pelanggan selama waktu pelayanan, yaitu

$$E(Q) = \frac{p^2 E(S(S-1))}{2(1-\rho)}. \tag{10}$$

Ekspektasi waktu tunggu pelanggan dalam antrian $(E(W))$ dapat ditentukan dengan perbandingan antara ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian dan parameter waktu antar kedatangan, yaitu

$$E(W) = \frac{p(E(S(S-1)))}{2(1-\rho)}. \tag{11}$$

3 Sistem Antrian Moddel Geo/G/1 dengan *Vacation*

Vacation terjadi ketika pelayan selesai melayani semua pelanggan dalam sistem antrian. Pelayan akan mendapatkan jumlah maksimum *vacation* (H) selama pelanggan datang. Variabel random diskret H diasumsikan berdistribusi umum dengan pmf h_j untuk $j \geq 1$. Sementara itu, variabel random vacation (V) diasumsikan bersifat independen dan identik mengikuti distribusi umum dengan pmf v_j untuk $j \geq 1$.

Andaikan L_n adalah jumlah pelanggan dalam sistem pada saat pelanggan ke-n meninggalkan sistem. Proses $\{L_n, n \geq 1\}$ adalah rantai Markov dari waktu diskret, maka

$$L_{n+1} = \begin{cases} L_n - \delta + A, L_n \geq 1 \\ Q_b - 1 + A, L_n = 0 \end{cases} \tag{12}$$

dengan Q_b adalah jumlah pelanggan dalam sistem pada saat waktu sibuk dimulai.

Lemma 1. *Bentuk pgf dan ekspektasi dari jumlah pelanggan dalam sistem pada saat waktu sibuk dimulai* (Q_b, *yaitu*

$$Q_b(z) = H(V(\bar{p}))z + \frac{1 - H(V(\bar{p}))}{1 - V(\bar{p})}(V(1 - p(1-z)) - V(\bar{p})) \tag{13}$$

$$E(Q_b) = H(V(\bar{p}))z + \frac{1 - H(V(\bar{p}))}{1 - V(\bar{p})} pE(V) \tag{14}$$

Teorema 1. *Untuk* $\rho < 1$, *pada sistem antrian model Geo/G/1 dengan vacation,* L_v *yaitu jumlah pelanggan dalam sistem akibat adanya vacation, dapat diperoleh dengan menjumlahkan dua variabel random yang independen, yaitu*

$$L_v = L + L_d$$

dimana L adalah jumlah pelanggan dalam sistem pada model Geo/G/1 tanpa vacation, dengan bentuk pgf pada Persamaan 6. Variabel random L_d *adalah* *pertambahan jumlah pelanggan dalam sistem akibat adanya vacation, dengan bentuk pgf adalah sebagai berikut*

$$L_d(z) = \frac{1 - Q_b(z)}{E(Q_b)(1-z)} \tag{15}$$

dimana $Q_b(z)$ diberikan pada Lemma 1.

Selanjutnya, ekspektasi pertambahan jumlah pelanggan dalam sistem akibat adanya *vacation* yaitu

$$E(Ld) = \frac{(1 - H(V(\bar{p}))p^2 E(V(V-1))}{(1 - V(\bar{p}))2E(Q_b)}.$$

Dengan menggunakan Teorema 1, ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem akibat adanya *vacation*, yaitu

$$E(L_v) = \rho + \frac{p^2 E(S(S-1))}{2(1-\rho)} + \frac{(1 - H(V(\bar{p}))p^2 E(V(V-1))}{(1 - V(\bar{p}))2E(Q_b)}.$$

Lemma 2. *Jika Ω adalah waktu tunggu dari kedatangan pertama pada saat sibuk, maka bentuk pgf dan ekspektasi dari Ω adalah*

$$\Omega(z) = H(V(\bar{p})) + \frac{(1 - H(V(\bar{p})))(p(V(z) - V(\bar{p})))}{(1 - V(\bar{p}))(z - \bar{p})} \tag{16}$$

$$E(\Omega) = \frac{(1 - H(V(\bar{p})))(p^2 E(V) - p(1 - V(\bar{p})))}{(1 - V(\bar{p}))p^2}. \tag{17}$$

Teorema 2. *Untuk $\rho < 1$, pada sistem antrian model Geo/G/1 dengan vacation, W_v adalah waktu tunggu pelanggan dalam antrian akibat adanya vacation, dapat diperoleh dengan menjumlahkan dua variabel random yang independen, yaitu*

$$W_v = W + W_d$$

dimana W adalah waktu tunggu pelanggan dalam antrian pada model Geo/G/1 tanpa vacation, dengan bentuk pgf pada Persamaan 7. Variabel random W_d adalah pertambahan waktu tunggu pelanggan dalam antrian akibat adanya vacation, dengan bentuk pgf adalah sebagai berikut

$$W_d(z) = \frac{p - (z - \bar{p})\Omega(z)}{E(Q_b)(1-z)} \tag{18}$$

dimana $\Omega(z)$ diberikan pada Lemma 2.

Berdasarkan Teorema 1 dan 2, dapat diperoleh ekspektasi pertambahan waktu tunggu pelanggan dalam antrian akibat adanya *vacation* $(E(W_d))$ dan ekspektasi waktu tunggu pelanggan dalam antrian akibat adanya *vacation* $(E(W_v))$. Oleh karena itu,

$$E(W_d) = \frac{(1 - H(V(\bar{p})))(pE(V(V-1)))}{(1 - V(\bar{p}))2E(Q_b)} \tag{19}$$

dan

$$E(W_v) = \frac{pE(S(S-1))}{2(1-\rho)} + \frac{(1 - H(V(\bar{p})))(pE(V(V-1)))}{(1 - V(\bar{p})2E(Q_b)}. \tag{20}$$

4 Simulasi

Simulasi dilakukan dengan menggunakan beberapa nilai *traffic intensity* dari sistem (ρ) dan parameter *vacation*(v) yang berbeda. Tujuan dari simulasi ini adalah untuk mengetahui besarnya nilai ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem akibat adanya *vacation* dan ekspektasi waktu tunggu pelanggan dalam antrian akibat adanya *vacation*. Dengan menggunakan beberapa asumsi, diperoleh Tabel 1 dan Tabel 2 berikut ini.

Tabel 1: Hasil estimasi jumlah pelanggan

v	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,9$
1/3	1,989	3,5	13,9
1/2	1,739	3,25	13,65
3/4	1,572	2,169	13,483

Berdasarkan Tabel 1, misalkan terdapat *traffic intensity* sebesar 0,1 dan parameter *vacation* sebesar 1/2, maka ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem akibat adanya *vacation* adalah 1,739 pelanggan per satuan waktu. Artinya jika ada seorang pelanggan yang datang dalam 10 satuan waktu dan parameter *vacation* sebesar 1/2, maka ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem akibat adanya *vacation* adalah 1,739 pelanggan per satuan waktu.

Tabel 2: Hasil estimasi waktu tunggu pelanggan

v	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,9$
1/3	7,556	12	52
1/2	6,556	11	51
3/4	5,889	10,333	50,33

Berdasarkan Tabel 2, misalkan terdapat *traffic intensity* sebesar 0,1 dan parameter *vacation* sebesar 1/2, maka ekspektasi waktu tunggu pelanggan dalam antrian akibat adanya *vacation* adalah 6,556 satuan waktu. Artinya jika ada seorang pelanggan yang datang dalam 10 satuan waktu dan parameter *vacation* sebesar 1/2, maka ekspektasi waktu tunggu pelanggan dalam antrian akibat adanya *vacation* adalah 6,556 satuan waktu.

5 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, diperoleh bahwa saat nilai parameter *vacation* dianggap tetap, nilai *traffic intensity* yang semakin besar, mengakibatkan ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem dan ekspektasi waktu tunggu pelanggan dalam antrian akibat adanya *vacation* akan semakin bertambah. Akan tetapi, saat nilai *traffic intensity* dianggap tetap, nilai parameter *vacation* yang semakin besar, mengakibatkan ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem dan ekspektasi waktu tunggu pelanggan dalam antrian akibat adanya *vacation* akan semakin berkurang.

Daftar Pustaka

[1] Algifari. 1996. *Probabilitas dalam Pengambilan Keputusan Bisnis*. BPFE. Yogyakarta.

[2] Bain, L. J., dan Engelhardt, M. 1992. *Introduction to Probability and Mathematcal Statistics*. Duxbury Press. California.

[3] Bronson, R., dan Wuspakrik, H. J. 1982. *Teori dan Soal-Soal Operations Research*. Mc. Graw-Hill. USA.

[4] Bryc. 1996. *Applied Probablility and Stochastic Processes*. Department of Mathematics University of Cincinati.

[5] Kakiay, T. J. 2004. *Dasar Teori Antrian untuk Kehidupan Nyata*. Penerbit ANDI. Yogyakarta.

[6] Mulyono, S. 2007. *Riset Operasi*. FEUI. Jakarta.

[7] Prapton. 1986. *Pengantar Proses Stokastik I*. Penerbit Karunika. Jakarta.

[8] Ross, S. M. 2010. *Introduction to Probability Models* 10^{th} *Ed*. Academic Press. USA.

[9] Subagyo, P., Asri, M., dan Handoko, T. H. 1986. *Dasar-Dasar Operations Research*. BPFE. Yogyakarta.

[10] Supranto, J. 2004. *Analisis Multivariat Arti dan Interpretasi*. Rineka Cipta. Jakarta.

[11] Tian, N., dan Zhang, Z.G. 2006. *Vacation Queueing Models Theory and Applications*. Springer. USA.

[12] Viniotis, Y. 1998. *Probability and Random Processes*. Mc. Graw-Hill. Singapore.