Jurnal UJMC, Jilid 1, No 1, Hal. 21-28
ISSN : 2460-3333

OPERATOR *SELF ADJOINT* PADA RUANG HILBERT

Gunawan

Universitas Muhammadiyah Purwokerto, gun.oge@gmail.com

Abstract. In this article, will discuss definition, examples, algebra properties, and some characteristic of self-adjoint operators on Hilbert space. In the Hilbert space there are types of bounded linear operators such as adjoint operators and self-adjoint operators. To investigate characteristic of self-adjoint operator required concepts of Hilbert space, operators on Hilbert spaces, Riesz representation theorem, and adjoint operators on Hilbert space. It then takes a thought to investigate the characteristic of self-adjoint operators. Discussion of self-adjoint operators more emphasis on understanding the definition, algebra properties, and characteristic of self-adjoint operators on Hilbert space. The results obtained are algebra properties of self-adjoint operators such as addition, subtraction, scalar multiplication, and multiplication of self-adjoint operators. In addition, some characteristic associated with self-adjoint operators on Hilbert space.

Keywords : *Riesz representation theorem, adjoint operators, self adjoint operators, Hilbert space.*

Abstrak. Pada artikel ini akan dibahas mengenai definisi, contoh, sifat- sifat aljabar, dan beberapa karakteristik operator *self adjoint* pada ruang Hilbert. Pada ruang Hilbert terdapat jenis-jenis operator *linear* terbatas diantaranya operator *adjoint* dan operator *self adjoint*. Untuk menyelidiki karakteristik operator *self adjoint* diperlukan konsep ruang Hilbert, operator pada ruang Hilbert, Teorema representasi Riesz, dan operator *adjoint* pada ruang Hilbert. Hal tersebut kemudian membawa pemikiran untuk menyelidiki karakteristik operator *self adjoint*. Pembahasan mengenai operator *self adjoint* lebih ditekankan pada memahami definisi, sifat- sifat aljabar, dan karakteristik operator *self adjoint* pada ruang Hilbert. Hasil penelitian yang diperoleh adalah sifat-sifat aljabar operator *self adjoint* diantaranya sifat penjumlahan, pengurangan, perkalian dengan skalar, dan perkalian operator *self adjoint*. Selain itu, beberapa karakteristik yang berkaitan dengan operator *self adjoint* pada ruang Hilbert.

Kata kunci: *teorema representasi Riesz, operator adjoint, operator self adjoint, ruang Hilbert.*

1 Pendahuluan

Di dalam analisis khususnya analisis fungsional, beberapa ruang yang sering dibicarakan adalah ruang *linear*, ruang bernorma, ruang Banach, ruang pre-Hilbert, dan ruang Hilbert. Ruang pre-Hilbert merupakan ruang *linear* X yang dilengkapi dengan fungsi yang memetakan setiap anggota $X \times X$ ke suatu bilangan kompleks dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Fungsi inilah yang kemudian dikenal dengan produk skalar (*inner product*) pada X. Ruang pre-Hilbert yang lengkap disebut ruang Hilbert. Pemetaan dari suatu ruang *linear* ke ruang *linear* yang lain atau dari suatu ruang *linear* ke ruang *linear* yang sama disebut operator. Diberikan ruang Hilbert X dan Y atas lapangan yang sama, yaitu F. Lapangan F yang dimaksud pada tulisan ini adalah □ atau □ . Operator $T : X \to Y$ dikatakan *linear* jika untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in F$ berlaku $T(x + y) = T(x) + T(y)$ dan $T(\alpha x) = \alpha T(x)$. Operator linear $T : X \to Y$ dikatakan terbatas jika terdapat konstanta $M \geq 0$ sehingga $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ untuk setiap $x \in X$. Himpunan semua operator linear terbatas dari X ke Y ditulis $B(X,Y)$. Lebih lanjut, dalam hal $X = Y$, $B(X,X)$ dituliskan $B(X)$ atau $B(Y)$.

Diberikan ruang Hilbert H atas lapangan F , himpunan semua operator *linear* terbatas dari H ke H ditulis $B(H)$, dan $T \in B(H)$. Lapangan F yang dimaksudkan di tulisan ini adalah $\mathbb{C}$ (bilangan kompleks). Operator *linear* kontinu T yang memiliki sifat $T = T^*$ dengan T^* *adjoint* operator T disebut sebagai operator positif. Pada ruang Hilbert terdapat jenis-jenis operator *linear* terbatas diantaranya operator *adjoint* dan operator *self adjoint*. Untuk menyelidiki karakteristik operator *self adjoint* diperlukan konsep ruang Hilbert, operator pada ruang Hilbert, teorema representasi Riesz, dan operator *adjoint* pada ruang Hilbert.

Hal tersebut kemudian membawa pemikiran untuk menyelidiki karakteristik operator *T* yang memiliki sifat $T = T^*$ dengan T^* *adjoint* operator *T*. Pembahasan mengenai karakteristik operator *self adjoint* pada tulisan ini, lebih ditekankan pada memahami definisi, sifat- sifat aljabar, dan karakteristik operator *self adjoint* pada ruang Hilbert. Rumusan masalah yang dibuat adalah bagaimana karakteristik atau sifat-sifat operator *self adjoint*. Dalam penelitian ini hanya dibatasi pada ruang Hilbert. Tujuan penelitian ini adalah untuk memberikan pemahaman dan pengetahuan mengenai sifat- sifat dan karakteristik operator *self adjoint* pada ruang Hilbert. Pembahasan mengenai operator *self adjoint* pada ruang Hilbert bermanfaat membantu mengembangkan ilmu matematika dan aplikasinya, khususnya analisis fungsional.

Pembahasan tentang operator *self adjoint* pada ruang Hilbert diawali dengan pendefinisian teorema representasi Riesz, operator *adjoint*, dan operator *self adjoint*, kemudian dilanjutkan dengan pembahasan mengenai karakteristik operator *self adjoint* pada ruang Hilbert. Dalam pendefinisian operator *adjoint* diperlukan penjelasan mengenai teorema representasi Riesz. Untuk pembahasan tentang konsep ruang Hilbert, operator *adjoint*, dan operator *self adjoint* diacu dari buku [3], [4], dan [1]. Selanjutnya, dalam pembahasan mengenai operator pada ruang Hilbert diperlukan penjelasan mengenai konsep konsep pemetaan *linear* kontinu pada ruang bernorma diacu dari buku [3] dan [4]. Selanjutnya, [1] dalam bukunya secara lengkap membahas tentang operator pada ruang Hilbert. Pembahasan mengenai karakteristik operator *self adjoint* pada ruang Hilbert diacu dari buku [2] dan [4].

2 Hasil dan Pembahasan

Pada bab ini dibahas tentang definisi, contoh, sifat-sifat aljabar, dan karakteristik operator *self adjoint* pada ruang Hilbert. Untuk menyelidiki karakteristik operator *self adjoint* pada ruang Hilbert, terlebih dahulu akan disampaikan mengenai teorema representasi Riesz, operator *adjoint*, dan beberapa sifat operator *self adjoint* pada ruang Hilbert.

2.1 Operator *Adjoint* Pada Ruang Hilbert

Untuk dapat mendefinisikan operator *adjoint*, dalam sub-bab berikut terlebih dahulu dibahas mengenai eksistensi representasi Riesz. Selain itu, dalam sub-bab berikut dipahami bahwa $B(H)$ adalah himpunan semua operator *linear* terbatas pada ruang Hilbert *H*.

Teorema 1 (*Teorema Representasi Riesz)*. *Diketahui H ruang Hilbert. Jika T sebarang fungsional linear terbatas pada H maka terdapat dengan tunggal* $y \in H$ sehingga $T(x) = \langle x, y\rangle, \forall x \in H$.

Bukti:

Diketahui *T* sebarang fungsional linear terbatas. Misalkan $A = N(T) = \{x \in H : T(x) = 0\}$. Diperoleh *A* ruang bagian tertutup *H*. Karena *A* ruang bagian tertutup dari *H*, maka $H = A \oplus A^{\perp}$. Selanjutnya,

1) Jika $T = O$ maka diambil $y = \theta$ sehingga teorema terbukti.
2) Jika $T \neq O$ maka $A \neq H$. Karena jika $A = H$ maka untuk sebarang $x \in H$ berakibat $T = O$. Oleh karena itu, $A \neq H$ maka $A^{\perp} \neq \{\theta\}$. Jadi, dapat diambil $z \in A^{\perp} \setminus \{\theta\}$. Karena $A \cap A^{\perp} = \{\theta\}$ maka $T(z) \neq \theta$. Dibentuk $y = \dfrac{\overline{T(z)}.z}{\|z\|^2} \in A^{\perp}$,

   diperoleh :

   $$\langle z, y\rangle = \left\langle z, \frac{\overline{T(z)}.z}{\|z\|^2} \right\rangle = \frac{T(z)}{\|z\|^2}\langle z, z\rangle = T(z).$$

   Untuk $y \in A^{\perp}, y \neq \theta$ maka $\langle y, y\rangle = T(y)$. Untuk $x \in H$, *x* dapat ditulis sebagai $x = \dfrac{T(x)}{T(y)}y + \left(x - \dfrac{T(x)}{T(y)}y \right)$, dengan $\left(x - \dfrac{T(x)}{T(y)}y \right) \in$ A, sebab

   $\left(x - \dfrac{T(x)}{T(y)}y \right) = T(x) - \dfrac{T(x)}{T(y)}T(y) = 0.$

   Karena $\left(x - \dfrac{T(x)}{T(y)}y \right)$ orthogonal terhadap *y*, maka :

   $$\left\langle x - \frac{T(x)}{T(y)}y, y \right\rangle = 0$$

   $$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle - \left\langle \frac{T(x)}{T(y)}y, y \right\rangle = 0$$

   $$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle = \frac{T(x)}{T(y)}\langle y, y\rangle$$

   $$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle = T(x)$$

Diperoleh $T(x)=\langle x,y\rangle,\forall x\in H$. Selanjutnya akan dibuktikan y tunggal. Diambil sebarang $y'\in H$ maka $T(x)=\langle x,y'\rangle,\forall x\in H$. Karena $T(x)=\langle x,y\rangle$ maka untuk setiap $x\in H$ diperoleh:

$\langle x,y\rangle=\langle x,y'\rangle$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle-\langle x,y'\rangle=0$

$\Leftrightarrow \langle x,y-y'\rangle=0$

$\Leftrightarrow y-y'=0\Rightarrow y=y'$

Jadi, y tunggal. Dengan demikian $T(x)=\langle x,y\rangle,\forall x\in H$. ■

Teorema 2. *Diketahui H dan K ruang Hilbert. Untuk setiap* $T:H\to K$ *operator linear kontinu, maka terdapat dengan tunggal operator linear kontinu* $T^*:K\to H$ *sehingga untuk setiap* $x\in H$ *dan* $y\in K$*, berakibat* $\langle T(x),y\rangle=\langle x,T^*(y)\rangle$.

Bukti:

Diambil sebarang $T\in L_c(H,K)$ dan $y\in K$. Dibentuk fungsional φ_y pada H dengan $\varphi_y(x)=\langle T(x),y\rangle,\forall x\in H$. Fungsional φ_y merupakan fungsional *linear* kontinu pada H sebab:

1) Untuk setiap $x_1,x_2\in H$ dan skalar α diperoleh:

$$\varphi_y(x_1+x_2)=\langle T(x_1+x_2),y\rangle=\langle T(x_1),y\rangle+\langle T(x_2),y\rangle=\varphi_y(x_1)+\varphi_y(x_2) \text{ dan}$$
$$\varphi_y(\alpha x_1)=\langle T(\alpha x_1),y\rangle=\alpha\langle T(x_1),y\rangle=\alpha\varphi_y(x_1)$$

2) Untuk setiap $x\in H$ diperoleh:

$$|\varphi_y(x)|=|\langle T(x),y\rangle|\le\|T(x)\|\|y\|\le\|T\|\|x\|\|y\|$$

Karena untuk setiap $y\in K$, φ_y merupakan pemetaan *linear* kontinu pada *H*, maka menurut Teorema 1, terdapat dengan tunggal $y'\in H$ sehingga untuk setiap $x\in H$ berlaku $\varphi_y(x)=\langle x,y'\rangle$. Berarti jelas bahwa untuk setiap $y\in K$ menentukan dengan tunggal $y'\in H$. Jadi terdapat operator $T^*:K\to H$ dengan $T^*(y)=y',\forall y\in K$. Oleh karena itu diperoleh :

$\varphi_y(x)=\langle T(x),y\rangle=\langle x,y'\rangle=\langle x,T^*(y)\rangle$

Jelas bahwa T^* tunggal. Selanjutnya, operator T^* *linear* dan kontinu, sebab :

1) Untuk setiap $y_1,y_2\in K,\ x\in H,$ dan α,β skalar diperoleh:

$$\begin{aligned}\langle x,T^*(\alpha y_1+\beta y_2)\rangle&=\langle T(x),\alpha y_1+\beta y_2\rangle\\&=\langle T(x),\alpha y_1\rangle+\langle T(x),\beta y_2\rangle\\&=\alpha^*\langle T(x),y_1\rangle+\beta^*\langle T(x),y_2\rangle\\&=\alpha^*\langle x,T^*(y_1)\rangle+\beta^*\langle x,T^*(y_2)\rangle=\langle x,\alpha T^*(y_1)\rangle+\langle x,\beta T^*(y_2)\rangle\end{aligned}$$

2) Untuk setiap $x\in H$ diperoleh:

a. Jika $x=\theta$ maka,

$$0=\left\|T^*(\theta)\right\|^2=\left\langle T^*(\theta),T^*(\theta)\right\rangle=\left\langle \theta,TT^*(\theta)\right\rangle\le\|T\|\|\theta\|\left\|T^*(\theta)\right\|=0.$$

b. Jika $x\ne\theta$ maka,

$$\left\|T^*(x)\right\|^2=\left\langle T^*(x),T^*(x)\right\rangle=\left\langle x,TT^*(x)\right\rangle\le\|T\|\|x\|\left\|T^*(x)\right\|$$

$$\Leftrightarrow\left\|T^*(x)\right\|\le\|T\|\|x\|.$$

Diambil $M=\|T\|$. Diperoleh $M\ge 0$, sehingga $\left\|T^*(x)\right\|\le M\,\|x\|$. Jadi, T^* terbatas. Dengan demikian, terbukti bahwa untuk setiap $T\in L_c(H,K)$ terdapat dengan tunggal $T^*\in L_c(K,H)$ sehingga:
$\left\langle T(x),y\right\rangle=\left\langle x,T^*(y)\right\rangle,\forall x\in H$ dan $y\in K$. ■

Definisi 1. *Operator linear kontinu T^* seperti yang dijelaskan pada Teorema 2.2 disebut operator adjoint dari T.*

Setelah disampaikan mengenai operator *adjoint*, berikut ini akan dibahas sifat-sifat operator *adjoint* pada ruang Hilbert.

Teorema 3. *Diketahui H dan K ruang Hilbert. Jika $S,T\in L_c\left(H,K\right)$ dan λ skalar, maka pernyataan- pernyataan berikut ini berlaku.*

a. $\left\langle T^*(y),x\right\rangle=\left\langle y,T(x)\right\rangle$, *untuk setiap* $x\in H, y\in K$

b. $\left(S+T\right)^*=S^*+T^*$

c. $\left(\lambda T\right)^*=\lambda^*T^*$

d. $\left(T^*\right)^*=T$

Bukti:

a. Diambil sebarang $x\in H, y\in K$.

$$\left\langle T^*(y),x\right\rangle=\overline{\left\langle x,T^*(y)\right\rangle}=\overline{\left\langle T(x),y\right\rangle}=\left\langle y,T(x)\right\rangle.$$

b. Diambil sebarang $x\in H$

$$\left\langle (S+T)^*(x),x\right\rangle=\left\langle x,(S+T)(x)\right\rangle=\left\langle x,S(x)+T(x)\right\rangle$$
$$=\left\langle x,S(x)\right\rangle+\left\langle x,T(x)\right\rangle=\left\langle S^*(x),x\right\rangle+\left\langle T^*(x),x\right\rangle=\left\langle (S^*+T^*)(x),x\right\rangle.$$

Jadi, $(S+T)^*=S^*+T^*$.

c. Diambil sebarang $x\in H$.

$$\left\langle (\lambda T)^*(x), x \right\rangle = \left\langle x, \lambda T(x) \right\rangle = \lambda^* \left\langle x, T(x) \right\rangle = \lambda^* \left\langle T^*(x), x \right\rangle = \left\langle (\lambda^* T^*)x, x \right\rangle.$$

Jadi, $(\lambda T)^* = \lambda^* T^*$.

d. Diambil sebarang $x \in H$.

$$\left\langle (T^*)^*(x), x \right\rangle = \left\langle x, T^*(x) \right\rangle = \left\langle T(x), x \right\rangle.$$

Jadi, $(T^*)^* = T$. ■

Teorema 4. *Diketahui H, K, dan L ruang Hilbert. Jika* $T \in L_c(H,K)$ *dan* $S \in L_c(K,L)$ *maka* $(ST)^* = T^* S^*$.

Bukti:

Diambil sebarang $x \in H$.

$$\left\langle (ST)^*(x), x \right\rangle = \left\langle x, ST(x) \right\rangle = \left\langle S^*(x), T(x) \right\rangle = \left\langle T^* S^*(x), x \right\rangle.$$

Jadi, $(ST)^* = T^* S^*$. ■

2.2 Karakteristik Operator *Self Adjoint* Pada Ruang Hilbert

Berikut ini akan disamapaikan mengenai karakteristik operator *self adjoint* pada ruang Hilbert. Pembahasan mengenai karakteristik operator *self adjoint* lebih difokuskan pada definisi, sifat- sifat aljabar, dan sifat- sifat lain yang berkaitan dengan operator *self adjoint* pada ruang Hilbert.

Definisi 2. *Diketahui H ruang Hilbert dan* $T \in B(H)$. *Operator T dikatakan self-adjoint jika* $T^* = T$.

Teorema 5. *Diketahui H ruang Hilbert dan* $S, T \in B(H)$. *Jika S, T self adjoint maka*

1) $S \pm T$
2) $\alpha T, \alpha \in \mathbb{R}$
3) ST, dengan $ST = TS$

masing- masing merupakan self adjoint.

Bukti:

1) Diambil sebarang $x \in H$.

$$\left\langle (S \pm T)(x), x \right\rangle = \left\langle S(x) \pm T(x), x \right\rangle = \left\langle S(x), x \right\rangle \pm \left\langle T(x), x \right\rangle = \left\langle x, S^*(x) \right\rangle \pm \left\langle x, T^*(x) \right\rangle$$
$$= \left\langle x, S(x) \right\rangle \pm \left\langle x, T(x) \right\rangle = \left\langle S^*(x), x \right\rangle \pm \left\langle T^*(x), x \right\rangle = \left\langle (S^* \pm T^*)x, x \right\rangle = \left\langle (S \pm T)^* x, x \right\rangle$$

Jadi, $S \pm T = (S \pm T)^*$. Dengan demikian, $S \pm T$ self adjoint.

2) Diambil sebarang $x \in H$.

$$\left\langle \alpha Tx, x \right\rangle = \left\langle x, (\alpha T)^* x \right\rangle = \left\langle x, \alpha^* T^* x \right\rangle = \left\langle x, \alpha Tx \right\rangle = \left\langle \alpha^* T^*(x), x \right\rangle = \left\langle (\alpha T)^* x, x \right\rangle$$

Jadi, $\alpha T = (\alpha T)^*$. Dengan demikian, αT self adjoint.

3) Diambil sebarang $x \in H$.

$$\langle ST(x), x\rangle = \langle T(x), S^*(x)\rangle = \langle x, T^*S^*x\rangle = \langle x, TS(x)\rangle = \langle x, ST(x)\rangle = \langle (ST)^*(x), x\rangle$$

Jadi, $ST = (ST)^*$. Dengan demikian, ST self adjoint. ■

Teorema 6. *Diketahui H ruang Hilbert dan* $T \in B(H)$. *Pernyataan- pernyataan berikut ekuivalen:*

1) *T self adjoint*

2) $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle, \forall x, y \in H$

3) $\langle T(x), x\rangle = \langle x, T(x)\rangle, \forall x \in H$

4) $\langle T(x), x\rangle$ bilangan real, $\forall x \in H$.

Bukti:

$1) \Rightarrow 2)$ Diambil sebarang $x, y \in H$. Diperoleh:

$\langle T(x), y\rangle = \langle T^*(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$. Jadi, $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle, \forall x, y \in H$.

$2) \Rightarrow 3)$ Jelas dari yang diketahui.

$3) \Rightarrow 4)$ Diambil sebarang $x \in H$:

$\overline{\langle T(x), x\rangle} = \langle x, T(x)\rangle = \langle T(x), x\rangle$. Diperoleh $\langle T(x), x\rangle$ bilangan real $\forall x \in H$.

$4) \Rightarrow 1)$ Diambil sebarang $x \in H$:

$\langle T(x), x\rangle = \overline{\langle T(x), x\rangle} = \langle x, T(x)\rangle = \langle T^*(x), x\rangle$. Jadi, untuk setiap $x \in H$, $T^* = T$ (*T self adjoint).* ■

3 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas, kesimpulan yang dapat diambil adalah jika diberikan *H* ruang Hilbert atas lapangan *F*, maka operator *linear* kontinu *T* dikatakan *self adjoint* apabila operator T memenuhi sifat $T = T^*$, dengan T^* operator *adjoint T*. Lebih lanjut, apabila $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $S, T \in B(H)$ *self adjoint*, maka $(S \pm T), (\alpha T)$, dan (ST) merupakan operator *self adjoint*. Selain itu, jika *T* operator *self adjoint*, maka $\langle T(x), x\rangle$ real, $\forall x \in H$.

Daftar Pustaka

[1] Berberian, S.K. 1961. *Introduction to Hilbert Spaces*. Oxford University Press. New York.

[2] Furuta, T. 2002. *Invitation to Linear Operators*. Taylor and Francis. New York.

[3] Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley and Sons. New York.

[4] Weidmann, J. 1980. *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Springer-Verlag. New York.