

PEMODELAN MATEMATIKA DAN ANALISIS STABILITAS DARI PENYEBARAN PENYAKIT FLU BURUNG

Dinita Rahmalia

Universitas Islam Darul 'Ulum Lamongan,

Abstrak. Di Indonesia terdapat banyak peternak unggas sebagai matapencarian sehingga Indonesia rawan sebagai sumber penyebaran flu burung. Penyebab flu burung adalah virus influenza tipe A dengan sub tipe H5N1 yang menyebar antar unggas dan dapat menular pada manusia. Burung liar dan hewan domestik (ternak) menjadi sumber penyebar H5N1. Virus ini dapat menular melalui udara ataupun kontak melalui makanan, minuman, dan sentuhan.

Flu burung termasuk jenis penyakit mikroparasitis (jenis penyakit yang disebabkan oleh virus) tetapi ada keterkaitan antara unggas dan manusia sebagai hospes (*host*). Karena itu model flu burung berbeda dengan model-model flu umumnya.

Pada penelitian ini akan ditentukan analisis kualitatif dari model penyebaran flu burung (avian flu) untuk mendapatkan bilangan reproduksi dasar R_0 , dimana R_0 bertujuan mengetahui adanya penyebaran penyakit atau tidak adanya penyebaran penyakit melalui analisis stabilitas dari *disease free equilibrium* maupun *endemic equilibrium*.

Kata Kunci: model flu burung, analisis stabilitas, R_0 .

1 Pendahuluan

Flu burung telah menjadi perhatian yang luas dari masyarakat karena telah menewaskan banyak korban baik unggas maupun manusia. Pada awal tahun 1918, wabah pandemi virus influenza telah membunuh lebih dari 40.000 orang, dimana sub tipe yang mewabah saat itu adalah virus H1N1 yang dikenal dengan "Spanish Flu". Tahun 1957 virus bermutasi menjadi H2N2 atau "Asian Flu" menyebabkan 100.000 kematian. Tahun 1968 virus bermutasi menjadi H3N2 atau "Hongkong Flu" menyebabkan 700.000 kematian. Tahun 1977 virus bermutasi menjadi H1N1 atau "Russian Flu". Akhirnya pada tahun 1997, virus bermutasi lagi menjadi H5N1 atau "Avian Influenza" [10].

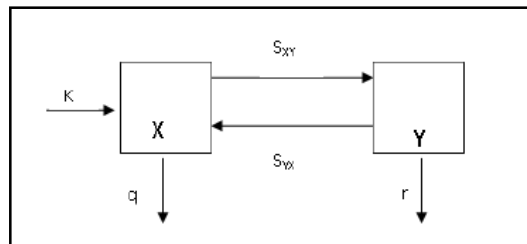
Di Asia Tenggara kebanyakan kasus flu burung terjadi pada jalur transportasi atau peternakan unggas sebagai jalur migrasi burung liar. Hingga 6 Juni 2007, WHO telah mencatat sebanyak 310 kasus dengan 189 kematian pada manusia yang disebabkan virus ini termasuk Indonesia dengan 99 kasus dengan 79 kematian [11]. Hal ini dipengaruhi oleh matapencarian penduduk Indonesia sebagai peternak unggas sehingga Indonesia rawan pada penyebaran penyakit flu burung. Selain itu, kurangnya pengetahuan sebagian penduduk Indonesia terhadap dampak dari flu burung juga ikut berpengaruh pada kasus penyebaran flu burung.

Pada penelitian ini, akan dianalisis kestabilan dari model matematika flu burung untuk memperoleh bilangan reproduksi dasar dan pola penyebarannya.

2 Kajian Teori

2.1 Sistem Kompartemen

Sistem kompartemen merupakan sebuah susunan kerja atau proses yang menunjukkan aliran individu dari satu kompartemen ke kompartemen lainnya, seperti saat individu tersebut sehat, tertular penyakit atau sembuh dari penyakit. Berikut ini adalah contoh sederhana bentuk sistem kompartemen :



Gambar 1. Kompartemen

2.2 Bilangan Reproduksi Dasar

Untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit diperlukan suatu parameter tertentu. Parameter yang biasa digunakan adalah Bilangan Reproduksi Dasar (*Basic Reproduction Number*).

Bilangan Reproduksi Dasar adalah bilangan yang menyatakan banyaknya rata-rata individu infeksi sekunder akibat tertular individu infeksi primer yang berlangsung didalam populasi *susceptible*. Namun adapula yang mengartikan rasio atau perbandingan yang menunjukkan jumlah individu *susceptible* yang menderita penyakit yang diakibatkan oleh satu individu *infected*.

Jika model hanya mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik, maka tidak terjadi endemik jika $R_0 < 1$ dan terjadi endemik jika $R_0 > 1$.

2.3 Kestabilan Titik Tetap

Pandang persamaan diferensial

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (2)$$

Sebuah titik (\bar{x}_0, \bar{y}_0) merupakan titik kesetimbangan dari Persamaan 1 dan 2 jika memenuhi $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$ dan $g(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$. Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan.

$$x(t) \equiv \bar{x}_0, \text{ dan } y(t) \equiv \bar{y}_0$$

adalah penyelesaian kesetimbangan dari persamaan untuk semua t .

2.4 Stabil Asimtotis Lokal

Kestabilan asimtotis lokal merupakan kestabilan dari sistem linier atau kestabilan dari linierisasi sistem tak linier. Kestabilan lokal pada titik kesetimbangan ditentukan oleh tanda bagian real dari akar-akar karakteristik sistem dari matriks Jacobian yang dihitung di sekitar titik kesetimbangan.

Definisi 1. Jika J adalah matriks yang berukuran $n \times n$ maka vektor tak nol dinamakan vektor karakteristik dari J jika memenuhi :

$$Jx = \lambda x$$

Untuk suatu skalar λ disebut nilai karakteristik dari J dan x dikatakan vektor karakteristik yang bersesuaian dengan λ .

Untuk mencari nilai karakteristik matriks J yang berukuran $n \times n$, maka dapat dituliskan kembali persamaan sebagai $Jx = \lambda Ix$ atau ekuivalen dengan $(J - \lambda I)x = 0$, mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika $|J - \lambda I| = 0$. Jika matriks $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka dapat ditulis

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ atau } \lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0$$

Akar-akar karakteristiknya adalah $\lambda_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$.

Teorema 1. Titik setimbang (\bar{x}_0, \bar{y}_0) stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai karakteristik matriks $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya.

2.5 Kriteria Kestabilan Routh Hurwitz

Kriteria kestabilan Routh – Hurwitz adalah suatu metode untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar karakteristik secara langsung.

Jika diketahui suatu persamaan karakteristik dengan orde ke- n sebagai berikut :

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

dengan

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1},$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1},$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_5 - b_3 a_1}{b_1}$$

Sistem dikatakan stabil jika akar-akar persamaan karakteristik dari suatu matriks mempunyai real nilai eigen negatif jika dan hanya jika elemen-elemen pada kolom pertama $(a_0, a_1, b_1, c_1, \dots)$ memiliki tanda yang sama.

3 Hasil dan Pembahasan

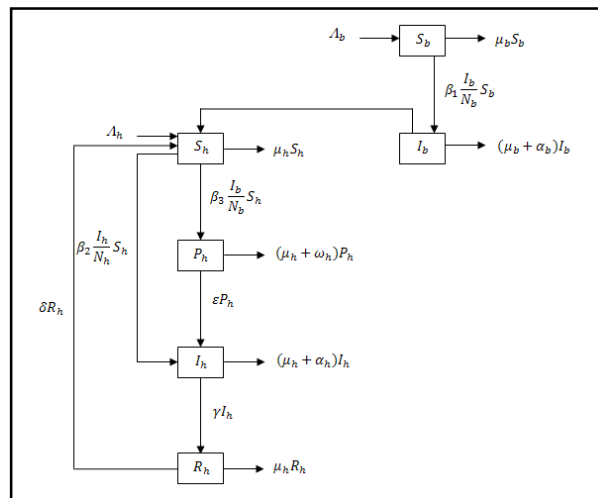
3.1 Permodelan Matematika

Permodelan matematika penyebaran flu burung pada populasi campuran adalah menggabungkan penyebaran flu burung yang terjadi pada populasi unggas dan populasi manusia, karena penyebaran flu burung pada populasi manusia dipengaruhi oleh populasi unggas. Jadi dalam penyebarannya melibatkan dua populasi. Namun terdapat sedikit perbedaan yang terletak pada penularannya.

Penyebaran flu burung pada populasi campuran adalah penyebaran flu burung yang melibatkan unggas dan manusia. Secara teori, ketika manusia melakukan kontak dengan unggas yang terinfeksi, virus tersebut *belum bermutasi* sehingga belum dapat menularkan pada manusia sehat lainnya. Ketika virus flu burung *telah bermutasi*, maka manusia yang terinfeksi flu burung itu dapat menularkan pada manusia sehat lainnya. Namun karena infeksi berasal dari kontak dengan unggas yang terinfeksi, maka penyebarannya melibatkan unggas.

Supaya pada populasi unggas dan manusia dapat dihubungkan maka ada penambahan asumsi yaitu penambahan jumlah manusia *pre-infective* yang dinyatakan dengan P_h , yaitu manusia yang telah terinfeksi flu burung yang belum bermutasi sehingga belum dapat menularkan penyakitnya pada manusia sehat lainnya. Manusia terinfeksi flu burung pada saat melakukan kontak dengan unggas *infective* sebesar β_3 dan laju mutasi yang dinyatakan dengan ε .

Dengan menggabungkan flu burung yang terjadi pada populasi unggas dan populasi manusia, maka didapat model kompartemen sebagai berikut :



Gambar 2. Kompartemen penyebaran flu burung pada populasi campuran

Untuk memudahkan penyelesaian, maka model dinormalisasikan menjadi

$$\frac{di_b}{dt} = \beta_1 i_b (1 - i_b) - \mu_b i_b - \alpha_b i_b \tag{3}$$

$$\frac{dS_h}{dt} = \Lambda_h - \beta_3 i_b S_h - \beta_2 i_h S_h - \mu_h S_h + \delta r_h \tag{4}$$

$$\frac{dp_h}{dt} = \beta_3 i_b s_h - \mu_h p_h - \omega_h p_h - \varepsilon p_h \quad (5)$$

$$\frac{di_h}{dt} = \beta_2 i_h s_h + \varepsilon p_h - \mu_h i_h - \alpha_h i_h - \gamma i_h \quad (6)$$

$$\frac{dr_h}{dt} = \gamma i_h - \mu_h r_h - \delta r_h \quad (7)$$

Dengan daerah penyelesaian :

$$\Omega'_{bh} = \{(i_b, s_h, p_h, i_h, r_h) | 0 \leq i_b; 0 \leq s_h; 0 \leq p_h; 0 \leq i_h; 0 \leq r_h; s_h + p_h + i_h + r_h \leq n_h \leq 1; 0 \leq i_b \leq 1\}$$

3.2 Analisis Stabilitas

Dengan mengambil $\frac{di_b}{dt} = 0, \frac{ds_h}{dt} = 0, \frac{dp_h}{dt} = 0, \frac{di_h}{dt} = 0, \frac{dr_h}{dt} = 0$, maka akan diperoleh titik kesetimbangan model. Jika diambil $i_b^0 = 0$ dan $i_h^0 = 0$, maka akan diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit, dimana pada keadaan ini semua unggas dan manusia masuk ke dalam populasi *susceptible* dan tidak ada unggas maupun manusia *infective* yang dapat menyebarkan penyakit. Dengan demikian tidak ada populasi manusia yang sembuh dari penyakit (tidak ada manusia *recovered* atau $r_h^0 = 0$). Akibatnya, didapat titik kesetimbangan bebas penyakit pada populasi campuran adalah $E_{bh}^0 = (i_b^0, s_h^0, p_h^0, i_h^0, r_h^0) = (0, \frac{\Lambda_h}{\mu_h}, 0, 0, 0)$.

Jika diambil $i_b^* \neq 0$ dan $i_h^* \neq 0$, maka dapat ditunjukkan terdapat unggas *infective* dan manusia *infective* yang dapat menyebarkan penyakit dan menyebabkan endemik. Dengan demikian, didapat titik kesetimbangan endemik pada populasi campuran adalah $E_{bh}^* = (i_b^*, s_h^*, p_h^*, i_h^*, r_h^*)$ dengan

$$i_b^* = \frac{\mu_b + \alpha_b}{\beta_1} (R - 1); \quad s_h^* = \frac{\Lambda_h + \delta \left(\frac{\gamma i_h^*}{\mu_h + \delta} \right)}{\beta_3 i_b^* + \beta_2 i_h^* + \mu_h}$$

$$p_h^* = \frac{\beta_3 i_b^*}{\mu_h + \omega_h + \varepsilon} \left(\frac{\Lambda_h + \delta \left(\frac{\gamma i_h^*}{\mu_h + \delta} \right)}{\beta_3 i_b^* + \beta_2 i_h^* + \mu_h} \right)$$

$$i_h^* = i_h^*; \quad r_h^* = \frac{\gamma i_h^*}{\mu_h + \delta}$$

dan

$$i_h^* = \frac{-\Lambda_h \beta_2 L - \frac{\varepsilon \beta_3 i_b^* \delta \gamma}{\mu_h + \delta} + LM \beta_3 i_b^* + LM \mu_h}{2 \left(\frac{\gamma \delta \beta_2 L}{\mu_h + \delta} - LM \beta_2 \right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\Lambda_h \beta_2 L + \frac{\varepsilon \beta_3 i_b^* \delta \gamma}{\mu_h + \delta} - LM \beta_3 i_b^* - LM \mu_h \right)^2 - 4 \left(\frac{\gamma \delta \beta_2 L}{\mu_h + \delta} - LM \beta_2 \right) (\varepsilon \beta_3 i_b^* \Lambda_h)}}{2 \left(\frac{\gamma \delta \beta_2 L}{\mu_h + \delta} - LM \beta_2 \right)}$$

$$R = \frac{\beta_1}{\mu_b + \alpha_b}, L = \mu_h + \omega_h + \varepsilon \text{ dan } M = \mu_h + \alpha_h + \gamma$$

Diberikan matriks Jacobian pada populasi campuran

$$J = \begin{bmatrix} \beta_1 - 2\beta_1 i_b - \mu_b - \alpha_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_3 s_h & -\beta_3 i_b - \beta_2 i_h - \mu_h & 0 & -\beta_2 s_h & \delta \\ \beta_3 s_h & \beta_3 i_b & -\mu_h - \omega_h - \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 i_h & \varepsilon & \beta_2 s_h - \mu_h - \alpha_h - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu_h - \delta \end{bmatrix}$$

$$J(E_{bh}^0) = \begin{bmatrix} \beta_1 - 2\beta_1 i_b^0 - \mu_b - \alpha_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_3 s_h^0 & -\beta_3 i_b^0 - \beta_2 i_h^0 - \mu_h & 0 & -\beta_2 s_h^0 & \delta \\ \beta_3 s_h^0 & \beta_3 i_b^0 & -\mu_h - \omega_h - \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 i_h^0 & \varepsilon & \beta_2 s_h^0 - \mu_h - \alpha_h - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu_h - \delta \end{bmatrix}$$

Nilai eigen diperoleh dari $\det(J(E_{bh}^0) - \lambda I) = 0$ dari persamaan karakteristik , yaitu

$$(\beta_1 - \mu_b - \alpha_b - \lambda)(-\mu_h - \lambda)(-\mu_h - \omega_h - \varepsilon - \lambda) \left(\beta_2 \left(\frac{\Lambda_h}{\mu_h} \right) - \mu_h - \alpha_h - \gamma - \lambda \right) (-\mu_h - \delta - \lambda) = 0,$$

sehingga didapat

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \beta_1 - \mu_b - \alpha_b \\ \lambda_2 &= -\mu_h < 0 \\ \lambda_3 &= -\mu_h - \omega_h - \varepsilon < 0 \\ \lambda_4 &= \beta_2 \left(\frac{\Lambda_h}{\mu_h} \right) - \mu_h - \alpha_h - \gamma \\ \lambda_5 &= -\mu_h - \delta = -(\mu_h + \delta) < 0. \end{aligned}$$

Titik kesetimbangan dari suatu sistem dikatakan stabil jika akar-akar persamaan karakteristik dari suatu matriks mempunyai nilai eigen dengan bagian real negatif. Berdasarkan nilai eigen λ_1 dapat dianalisa sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \beta_1 - \mu_b - \alpha_b \\ &= (\mu_b + \alpha_b) \left(\frac{\beta_1}{\mu_b + \alpha_b} - 1 \right). \end{aligned}$$

Nilai eigen λ_1 bernilai positif jika $\frac{\beta_1}{\mu_b + \alpha_b} > 1$ dan bernilai negatif jika $\frac{\beta_1}{\mu_b + \alpha_b} < 1$.

Oleh karena itu *Basic Reproduction Number* (R_{bh0}) adalah : $\frac{\beta_1}{\mu_b + \alpha_b}$.

Berdasarkan nilai eigen λ_4 dapat dianalisa sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= \beta_2 \left(\frac{\Lambda_h}{\mu_h} \right) - \mu_h - \alpha_h - \gamma \\ &= (\mu_h + \alpha_h + \gamma) \left(\frac{\beta_2 \Lambda_h}{(\mu_h + \alpha_h + \gamma) \mu_h} - 1 \right). \end{aligned}$$

Nilai eigen λ_4 bernilai positif jika $\frac{\beta_2 \Lambda_h}{(\mu_h + \alpha_h + \gamma) \mu_h} > 1$ dan bernilai negatif jika

$\frac{\beta_2 \Lambda_h}{(\mu_h + \alpha_h + \gamma) \mu_h} < 1$. Oleh karena itu, *Basic Reproduction Number* (R_{h0}) adalah :

$$\frac{\beta_2 \Lambda_h}{(\mu_h + \alpha_h + \gamma) \mu_h}$$

$$J(E_{bh}^*) = \begin{bmatrix} \beta_1 - 2\beta_1 i_b^* - \mu_b - \alpha_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_3 s_h^* & -\beta_3 i_b^* - \beta_2 i_h^* - \mu_h & 0 & -\beta_2 s_h^* & \delta \\ \beta_3 s_h^* & \beta_3 i_b^* & -\mu_h - \omega_h - \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 i_h^* & \varepsilon & \beta_2 s_h^* - \mu_h - \alpha_h - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu_h - \delta \end{bmatrix}$$

Nilai eigen diperoleh dari $\det(J(E_{bh}^*) - \lambda I) = 0$ dari persamaan karakteristik

$$a_0 \lambda^5 + a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^3 + a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5 = 0, \text{ dengan nilai}$$

$$a_0 = -1$$

$$a_1 = E - [-(A + B) - (C + D)]$$

$$a_2 = E[-(A + B) - (C + D)] - [AB + (A + B)(C + D) + CD + \beta_2 i_h^* \beta_2 s_h^*]$$

$$a_3 = E[AB + (A + B)(C + D) + CD + \beta_2 i_h^* \beta_2 s_h^*] - [-AB(C + D) - (A + B)CD + \beta_3 i_b^* \beta_2 s_h^* \varepsilon - \beta_2 i_h^* \delta \gamma - \beta_2 i_h^* \beta_2 s_h^* (D + B)]$$

$$a_4 = E[-AB(C + D) - (A + B)CD + \beta_3 i_b^* \beta_2 s_h^* \varepsilon - \beta_2 i_h^* \delta \gamma - \beta_2 i_h^* \beta_2 s_h^* (D + B)] - [ABCD - \beta_3 i_b^* \delta \varepsilon \gamma - \beta_3 i_b^* D \beta_2 s_h^* \varepsilon + \beta_2 i_h^* B \delta \gamma \lambda + \beta_2 i_h^* \beta_2 s_h^* DB]$$

$$a_5 = E[ABCD - \beta_3 i_b^* \delta \varepsilon \gamma - \beta_3 i_b^* D \beta_2 s_h^* \varepsilon + \beta_2 i_h^* B \delta \gamma \lambda + \beta_2 i_h^* \beta_2 s_h^* DB]$$

dan

$$A = -\beta_3 i_b^* - \beta_2 i_h^* - \mu_h; B = -\mu_h - \omega_h - \varepsilon; C = \beta_2 s_h^* - \mu_h - \alpha_h - \gamma; D = -\mu_h - \delta.$$

Titik kesetimbangan dari suatu sistem dikatakan stabil, jika akar-akar persamaan karakteristik dari suatu matriks mempunyai nilai eigen dengan bagian real negatif jika dan hanya $a_1 < 0, a_2 < 0, a_3 < 0, a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 < a_1^2 a_4 - a_1 a_0 a_5$. Supaya $a_1 < 0, a_2 < 0, a_3 < 0, a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 < a_1^2 a_4 - a_1 a_0 a_5$, maka $i_b^* > 0, i_h^* > 0, p_h^* > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu_b + \alpha_b}{\beta_1} \left(\frac{\beta_1}{\mu_b + \alpha_b} - 1 \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta_1}{\mu_b + \alpha_b} > 1.$$

Ketika $\beta_1 > \mu_b + \alpha_b$ atau $R_{bh0} = \frac{\beta_1}{\mu_b + \alpha_b} > 1$, maka $a_1 < 0, a_2 < 0, a_3 < 0, a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 < a_1^2 a_4 - a_1 a_0 a_5$.

Ketika $\beta_2 \Lambda_h > \mu_h (\mu_h + \alpha_h + \gamma)$ atau $R_{h0} = \frac{\beta_2 \Lambda_h}{\mu_h (\mu_h + \alpha_h + \gamma)} > 1$ maka $a_1 < 0, a_2 < 0, a_3 < 0, a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 < a_1^2 a_4 - a_1 a_0 a_5$.

3.3 Simulasi

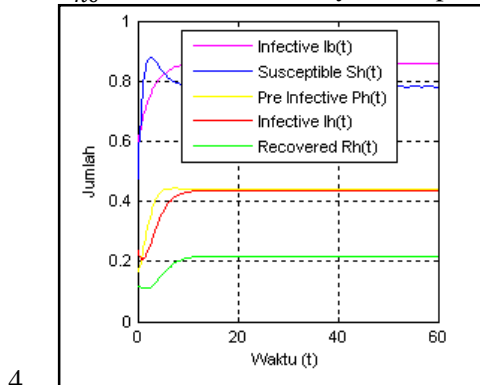
Dengan mengambil parameter

$$\beta_1 = 0.5; \mu_b = 0.05; \alpha_b = 0.02; \Lambda_h = 0.8; \beta_2 = 0.7; \beta_3 = 0.5; \mu_h = 0.4; \omega_h = 0.06; \varepsilon = 0.3; \alpha_h = 0.05; \gamma = 0.4; \delta = 0.4$$

dan nilai awal $t = 0$

$$i_b = 0.6; s_h = 20; p_h = 7; i_h = 10; r_h = 5,$$

didapat $R_{bh0} = 7.1429$ dan $R_{h0} = 1.6471$. Akibatnya, didapat grafik kestabilan



Gambar 3. Grafik kestabilan penyebaran flu burung pada populasi campuran.

a. Laju Pertumbuhan Unggas *Infective*

Pada awal laju pertumbuhannya, unggas *infective* mengalami kenaikan karena laju infeksi lebih besar daripada laju kematian atau emigrasi serta kematian akibat flu burung. Kemudian konstan karena tidak ada penambahan dari unggas *susceptible* yang terinfeksi.

b. Laju Pertumbuhan Manusia *Susceptible*

Pada awal laju pertumbuhannya, manusia *susceptible* mengalami kenaikan karena manusia *recovered* telah hilang kekebalannya dan menjadi manusia *susceptible*. Kemudian mengalami penurunan karena manusia *susceptible* terinfeksi dan menjadi manusia *pre-infective* dan *infective*. Kemudian konstan

karena tidak ada penambahan dari manusia *recovered* yang telah hilang kekebalannya dan tidak ada pengurangan pada manusia *susceptible* yang terinfeksi.

c. Laju Pertumbuhan Manusia *Pre-Infective*

Pada awal laju pertumbuhannya, manusia *pre-infective* mengalami kenaikan karena manusia *susceptible* terinfeksi dan menjadi manusia *pre-infective*. Kemudian konstan karena tidak ada penambahan dari manusia *susceptible* yang terinfeksi dan tidak ada pengurangan pada manusia *pre-infective* yang bermutasi.

d. Laju Pertumbuhan Manusia *Infective*

Pada awal laju pertumbuhannya, manusia *infective* mengalami kenaikan selain karena manusia *susceptible* terinfeksi dan menjadi manusia *infective*, manusia *pre-infective* bermutasi dan menjadi manusia *infective*. Kemudian konstan karena tidak ada penambahan dari manusia *susceptible* yang terinfeksi, manusia *pre-infective* yang bermutasi, dan tidak ada pengurangan pada manusia *infective* yang sembuh.

e. Laju Pertumbuhan Manusia *Recovered*

Pada awal laju pertumbuhannya, manusia *recovered* mengalami kenaikan karena manusia *infective* sembuh dan menjadi manusia *recovered*. Kemudian konstan karena tidak ada penambahan dari manusia *infective* yang sembuh dan tidak ada pengurangan pada manusia *recovered* yang telah hilang kekebalannya.

4 Kesimpulan dan Saran

Pengaruh titik kesetimbangan pada kestabilan lokal adalah pada populasi campuran adalah :

1. Jika $R_{bh0} < 1$ dan $R_{h0} < 1$ maka didapat $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0, \lambda_5 < 0$. Titik kesetimbangan bebas penyakit stabil yang berarti jumlah unggas *infective* dan manusia *infective* berkurang sehingga flu burung akan menurun dan tidak terjadi penyebaran (endemik) pada populasi manusia.
2. Jika $R_{bh0} > 1$, dan $R_{h0} > 1$ maka didapat $a_1 < 0, a_2 < 0, a_3 < 0, a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 < a_1^2 a_4 - a_1 a_0 a_5$. Titik kesetimbangan endemik stabil yang berarti jumlah unggas *infective* dan manusia *infective* bertambah sehingga flu burung akan meningkat dan terjadi penyebaran (endemik) pada populasi manusia.

Daftar Pustaka

- [1] Badan Penelitian dan Pengembangan Kesehatan, Depkes RI. 20 Februari 2010. *Flu Burung*, <URL :www.litbang.depkes.go.id/maskes/072005/flu_burung.pdf>
- [2] De Leon, C.V. 2009. *Constructions of Lyapunov Functions for Classics SIS, SIR and SIRS Epidemic model with Variable Population Size*.
- [3] Derouich, M., dan Boutayeb, A. 2008. *An Avian Influenza Mathematical Model*.

- [4] Finizio, N., dan Landas, G. 1988. *Ordinary Differential Equations with Modern Applications*. Wadsworth Publishing Company. California.
- [5] Hamid. 2006. *Analisa Kualitatif Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza dengan Vaksinasi*. Thesis Jurusan Matematika ITS. Surabaya.
- [6] Iwami, S., Takeuchi, Y., dan Liu, X. 2007. *Avian-human Influenza Epidemic Model*.
- [7] Kristianto, D.A. 2009. *Analisis Model Perkembangan Virus HCV Type 4A pada Penyebaran Penyakit Hepatitis C*. Tugas Akhir Jurusan Matematika ITS. Surabaya.
- [8] Ma, Z. dan Li, J. 2009. *Dynamical Modeling and Analysis of Epidemics*. World Scientific Publishing. Singapore.
- [9] Mairides, H. 2008. *Model Penyebaran Avian Flu di Cikelet Jawa Barat*. Tugas Akhir Jurusan Matematika ITB. Bandung
- [10] Radji, M. 2006. *Avian Influenza A (H5N1): Patogenesis, Pencegahan, dan Penyebaran pada Manusia*.
- [11] Wikipedia. 19 Januari 2010. *Flu Burung*, <URL: http://id.wikipedia.org/wiki/Flu_burung.htm>