Jurnal UJMC, Volume 8, Nomor 2, Hal. 07 - 13
pISSN : 2460-3333 eISSN : 2579-907X

Diagonalisasi Operator Linear

Muhammad Naoval Husni[1]

[1]Program Studi Matematika Universitas Mataram, Indonesia, naovalhusni50@gmail.com

Abstract. There are many problems in finding a basis for R^n consisting of the eigenvectors of a square matrix A_{nxn}. These bases can be used to study the geometric properties of A and simplify various numerical calculations involving A. These bases are also important in various applications, one of which is from these bases we can derive the properties of vector spaces one of which is that each eigenspace is a subspace of its vector space. The problem of finding a basis consisting of eigenvectors is equivalent to the diagonalization problem. The author discuss the diagonalization of linear operators.

Keywords**:** *Diagonalizability, Linear Operation.*

Abstrak. Ada banyak masalah dalam mencari suatu basis untuk R^n yang terdiri dari vector-vektor eigen dari suatu matriks bujursangkar A_{nxn}. Basis-basis tersebut dapat digunakan untuk menelaah sifat-sifat geometri dari matriks A dan menyederhanakan berbagai perhitungan numerik yang melibatkan matriks A. Basis-basis ini ini juga penting dalam berbagai aplikasi, yang salah satunya dari basis-basis tersebut bisa didapatkan sifat-sifat dari ruang vector salah satunya setiap ruang eigen adalah subruang dari ruang vektornya. Masalah mencari basis yang terdiri dari vector-vektor eigen equivalen dengan maslah diagonalisasi .Penulis membahas mengenai diagonalisasi operator linear.

Kata Kunci**:** *Diagonalisasi, Matriks,Ortogonal,Operator Linear.*

1 Pendahuluan

Suatu matriks bujursangkar A_{nxn} dikatakan dapat didiagonalkan (*diagonalizabel*) jika terdapat matriks P yang mempunyai invers (dapat dibalik) sehingga $P^{-1}AP$ merupakan matriks diagonal. Jadi pengertian matriks diagonalisasi adalah proses memaksa suatu matriks bujursangkar dibuat menjadi matriks diagonal dengan cara mengkonstruksi matriks P yang berasal dari vektor-vektor eigen A, dimana vektor eigen pasti bebas linear karena vector eigen adalah basis dari ruang eigen yang mengakibatkan memiliki invers sehingga dengan syarat definisi matriks dapat didiagonalkan dapat ditemukan matriks diagonalnya [1],[2]. Atau secara sederhana dengan menemukan matriks P yang memiliki invers sehingga terdapat matriks A yang dapat didiagonalkan. Suatu matriks bujur sangkar A dikatakan dapat didiagonalkan jika ada suatu matriks yang dapat dibalik P sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ adalah suatu matriks diagonal, matriks P dikatakan mendiagonalkan P [3],[4],[5].

Hal tersebut hanya berlaku pada diagonalisasi matriks yang hanya cukup diagonal matriksnya similar dengan suatu matriks diagonal, sedangkan ada kasus dimana ditemukan suatu basis sehingga matriks representasinya relative terhadap basis diagonal. Misalkan $T: V \to V$ adalah suatu operator linear pada ruang vector V, Operator T dikatakan dapat didiagonalkan jika ada suatu basis terurut B dari V sehingga $[T]_B$ adalah matriks diagonal [2],[6],[7].

Diagonalisasi mempunya banyak aplikasi dan memiliki beberapa versi di struktur matematika lainnya [8],[9],[10],[11],[12],[13],[14],[15],[16].

2. Hasil dan Pembahasan

2.1 Diagonalisasi Operator Linear

Definisi 1.1. Misalkan $T: V \to V$ adalah suatu operator linear pada ruang vektor V operator T dikatakan dapat didiagonalkan jika ada suatu basis terurut B dari V sehingga $[T]_B$ adalah matriks diagonal.

Contoh 1:
$T: R^3 \to R^3$
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
Dengan basis yang dipilih $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Tunjukan apakah $[T]_B$ adalah matriks diagonal.
Penyelesaian:
Langkah pertama yang harus dilakukan ialah mencari peta-peta dari setiap basis b, kemudian kombinasi linear dari peta tersebut;
$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Sehingga didapat kombinasi linear dari peta tersebut adalah $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dengan cara yang sama didapat $T\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ sehingga didapat kombinasi linear berturut-turut adalah $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Jadi,matriks penyajian terhadap basis B dari operator T adalah $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Teorema 1.1. Jika $T: V \to V$ adalah sebuah operator linear pada suatu ruang vektor berdimensi terhingga V, dan jika B dan B' adalah basis untuk V maka :

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$$

Dimana P adalah matriks transisi dari B' ke B.
Teorema 1 ini digunakan untuk menentukan bentuk paling sederhana yang mungkin yang dapat diperoleh untuk matriks suatu operator linear dengan memilih basis dengan tepat.

Contoh 2 :
Misalkan $T: R^3 \to R^3$ adalah sebuah operator linear yang dirumuskan oleh $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ x_1+2x_2+x_3 \\ x_1+3x_3 \end{pmatrix}$, dengan matriks pendiagonal $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Penyelesaian:
Katrena $T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sehingga didapat kombinasi linear dari peta adalah $[T(e_1)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dengan cara yang sama didapat $T(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $T(e_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, sehingga didapat kombinasi linear berturut-turut adalah $[T(e_2)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, [T(e_3)]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Jadi,matriks penyajian terhadap basis B dari operator T adalah $[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Setelah itu berdasarkan teorema pertama P merupakan matriks transisi dari basis $B' = \{u_1', u_2', u_3'\}$ kebasis standar $B = \{e_1, e_2, e_3\}$.Oleh karena itu, $[u_1']_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $[u_2']_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[u_3']_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sehingga didapat basis dari B', $u_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan $u_3' = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Jadi $[T]_{B'} = [T[u_1']_{B'} | T[u_2']_{B'}] | T[u_3']_{B'}]$, $T(u_1') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sehingga $T[u_1']_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dengan cara yang sama didapat $T[u_2']_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $T[u_3']_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Diperoleh $[T]_{B'} = [T[u_1']_{B'} | T[u_2']_{B'}] | T[u_3']_{B'}]$, $[T]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Jadi, T : $R^3 \to R^3$ adalah sebuah operator linear yang dirumuskan oleh $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ x_1+2x_2+x_3 \\ x_1+3x_3 \end{pmatrix}$. Dengan B merupakan basis standar di R^3 dan basis $B' = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, merupakan operaror linear yang dapat didiagonalisasi.

Teorema 1.2. Misalkan $v_1, v_2, \dots, v_n$adalah vector eigen dari operator linear $T: V \to V$ yang bersesuaian dengan nilai-nilai-nilai eigen yang berbeda dengan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bebas linear.
Bukti

Misalkan v_i adalah vector eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i dengan $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i, j = 1,2,3, \dots, n$
Andaikan himpunan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tidak bebas linear maksimal dengan $1 < r < n$. Akibatnya :

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_{r+1} v_{r+1} = 0 \tag{1}$$

Deipenuhi oleh nilai k_i yang tidak semuanya nol, dengan demikian :

$$T(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_{r+1} v_{r+1}) = 0$$

Sehingga,

$$k_1 T(v_1) + k_2 T(v_2) + \cdots + k_{r+1} T(v_{r+1}) = 0$$
$$k_1 \lambda_1 v_1 + k_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + k_{r+1} \lambda_{r+1} v_{r+1} = 0 \tag{2}$$

Kalikan (... 1) dengan λ_{r+1}

$$(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_{r+1} v_{r+1}) = 0 \qquad \times \ (\lambda_{r+1})$$
$$(\lambda_{r+1}(k_1 v_1) + \cdots + \lambda_{r+1}(k_{r+1} v_{r+1}) = 0 \tag{3}$$

Kurangi persamaan 2 dikurangi persamaan 3

$$(k_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + k_{r+1} \lambda_{r+1} v_{r+1}) - (\lambda_{r+1}(k_1 v_1) + \lambda_{r+1}(k_2 v_2) + \cdots + \lambda_{r+1}(k_{r+1} v_{r+1})) = 0$$
$$k_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) v_1 + \cdots + k_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) v_r = 0$$

Karena $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ bebas linear maka $k_i(\lambda_i - \lambda_{r+1}) = 0$ untuk $i = 1,2 \dots, r$. Karena $(\lambda_i - \lambda_{r+1}) \neq 0$ untuk $i = 1,2 \dots, r$, maka haruslah $k_i = 0$ untuk $i = 1,2 \dots, r$. Diperoleh $(k_{r+1})(v_{r+1}) = 0$, karena $(v_{r+1}) \neq 0$ maka haruslah $k_{r+1} = 0$ (Kontradiksi). Jadi haruslah $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bebas linear.

Teorema 1.3. Misalkan $T: V \to V$ adalah suatu operator linear pada suatu ruang vector V berdimensi n maka pernyataan berikut ekuivalen :

1. T dapat didiagonalkan
2. Ada basis terurut B dari V yang terdiri dari vector-vektor eigen dari T
3. Untuk sebarang basis C dari V, $[T]_C$ dapat didiagonalkan.

Bukti

Adt 1 ⇒ 2 misalkan T dapat didiagonalkan maka ada $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ basis terurut V sehingga $[T]_B = \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$. Kemudian karena $[v_i]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ maka,

$[T(v_i)]_B = [T]_B [v_i]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ k_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Diperoleh $T(v_i) = k_i v_i$, $v_i \neq 0$. Jadi $v_1, v_2, \dots, v_n$ adalah vector-vektor eigen dari T. Kemudian akan ditunjukkan 2 ⇒ 1. Misalkan $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ basis berturut-turut V dengan $T(v_i) = \lambda_i v_i$ untuk setiap $i = 1, \dots, n$.

Akibatnya diperoleh $[v_i]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, dan $[T(v_i)]_B = \lambda_i [v_i]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ untuk setiap $i = 1, \dots, n$. Akibatnya $[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$, sehingga T dapat didiagonalkan.

Selanjutnya akan ditunjukkan $1 \Rightarrow 3$. Misalkan T dapat didiagonalkan dan C sebarang basis terurut dari V. Karena T dapat didiagonalkan maka terdapat B basis terurut dari V sehingga $[T]_B = D$, D matriks diagonal. Berdasarkan teorema sebelumnya ada matriks transisi P dari basis B ke C sehingga,

$$P^{-1}[T]_B P = [T]_B = D$$

Jadi $[T]_C$ dapat didiagonalkan.

Selanjutnya akan ditunjukkan $3 \Rightarrow 1$. Misalkan $[T]_C$ dapat didiagonalkan , artinya terdapat P yang dapat dibalik sehingga

$$P^{-1}[T]_C P = D$$

Pilih $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dengan $[v_i]_C = P_i$, maka B bebas linear. Karena $[v_i]_C = P_i$ bebas linear jadi B basis bagi V. Sehingga diperoleh $P[v_i]_B = P_i = [v_i]_C$, jadi P matriks transisi dari B ke C. Akibatnya $[T]_B = P^{-1}[T]_C P = D$, artinya T dapat didiagonalkan.

Contoh 3 :

Misalkan $T: R^3 \to R^3$ adalah suatu operator linier yang dirumuskan sebagai berikut $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Dengan basis $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Akan ditunjukkan T dapat didiagonalkan.

Penyelesaian :

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (0)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = (0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (0)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga didapat matriks diagonal dari permasalahan diatas adalah

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Contoh 4 :

Akan ditunjukkan $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -30 \\ 9 & -16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dapat didiagonalkan. Yang kemudian dapat dipergunakan untuk menghitung $\begin{pmatrix} 17 & -30 \\ 9 & -16 \end{pmatrix}^4$.

Penyelesaian:
Untuk mendapatkan persamaan karakteristik, didapatkan $det\begin{pmatrix} x-17 & 30 \\ -9 & x+16 \end{pmatrix} = 0$. Sehingga didapatkan persamaan karakteristik

$$(x-17)(x+16)-(30)(-9)=0$$
$$x^2 - x - 272 + 270 = 0$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1)=0$$

Sehingga didapat nilai eigen $\lambda_1 = -1\ dan\ \lambda_2 = 2,$ lalu didapat vektor eigen untuk masing-masing nilai eigen sebagai berikut. Untuk $\lambda_1 = -1$ diperoleh vektor eigen $Span\{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\}$. Dan untuk $\lambda_1 = 2$ diperoleh vektor eigen $Span\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Matriks diagonalnya adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ dengan $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ dan $P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
Sehingga $\begin{pmatrix} 17 & -30 \\ 9 & -16 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^4\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

3 Kesimpulan

Dalam makalah ini didapat pengertian dan beberapa teorema dan pembuktian dari diagonalisasi operator linear dan beberapa contoh yang sudah tertera didalam pembahasan. Berikut beberapa ringkasan teorema dan definisi dari hasil pembahasan diatas :

- Diagonalisasi operator linear adalah jika $T: V \to V$ adalah suatu operator linear pada ruang vektor V operator T dikatakan dapat didiagonalkan jika ada suatu basis terurut B dari V sehingga $[T]_B$ adalah matriks diagonal.
- Misalkan $T: V \to V$ adalah sebuah operator linear pada suatu ruang vektor berdimensi terhingga V, dan jika B dan B' adalah basis untuk V maka :
  $$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$$
  Dimana P adalah matriks transisi dari B' ke B.
- Misalkan $v_1, v_2, \dots, v_n$adalah vector eigen dari operator linear $T: V \to V$ yang bersesuaian dengan nilai-nilai-nilai eigen yang berbeda dengan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bebas linear.
- Misalkan $T: V \to V$ adalah suatu operator linear pada suatu ruang vector V berdimensi n maka pernyataan berikut ekuivalen :
  1. T dapat didiagonalkan
  2. Ada basis terurut B dari V yang terdiri dari vector-vektor eigen dari T
  3. Untuk sebarang basis C dari V, $[T]_C$ dapat didiagonalkan.

4 Daftar Pustaka

[1] Alfian, M. R., Maulana, F., Switrayni, N. W., Aini, Q., Putri, D. N., & Wardhana, I. G. A. W. (2022). The prime submodule of the integer module over itself. EIGEN MATHEMATICS JOURNAL, 27-30.
[2] Gazir, A., & Wardhana, I. G. A. W. (2019). Subgrup Non Trivial Dari Grup Dihedral. *Eigen Mathematics Journal* 1(2), 73-76.
[3] Jacob,B.1990.*Linear Algebra.* New York:University of California,Santa Barbara.
[4] Juliana, R., Wardhana, I. G. A. W., & Irwansyah. (2021, February). Some characteristics of cyclic prime, weakly prime and almost prime submodule of Gaussian integer modulo over integer. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2329, No. 1, p. 020004). AIP Publishing LLC.

[5] Maulana, F., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2018). Bilangan Prima dan Bilangan tak Tereduksi pada Bilangan bulat Gauss. In *Prosiding Seminar Nasional APPPI II* (pp. 383-387).
[6] Maulana, F., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2019). Ekivalensi Ideal Hampir Prima dan Ideal Prima pada Bilangan Bulat Gauss. *Eigen Mathematics Journal*, 1-5.
[7] Misuki, W. U., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2021, March). Some Characteristics of Prime Cyclic Ideal On Gaussian Integer Ring Modulo. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (Vol. 1115, No. 1, p. 012084). IOP Publishing.
[8] Saleh, K., Astuti, P., & Muchtadi-Alamsyah, I. (2016). On the structure of finitely generated primary modules. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, 38(5), 519.
[9] Switrayni, N. W., Wardhana, I. G. A. W., & Aini, Q. (2022). On Cyclic Decomposition Of Z-Module M_ {m×r}(Z_n), *Journal of Fundamental Mathematics and Applications*, 5(1), 47-51
[10] Wardhana, I., & Astuti, P. (2015). Karakteristik Submodul Prima Lemah dan Submodul Hampir Prima pada. *Jurnal Matematika & Sains*, 19(1), 16-20
[11] Wardhana, I. G. A. W., Astuti, P., & Muchtadi-Alamsyah, I. (2016). On almost prime submodules of a module over a principal ideal domain. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, 38(2), 121-138.
[12] Wardhana, I. G. A. W., Nghiem, N. D. H., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2021, November). A note on almost prime submodule of CSM module over principal ideal domain. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol.2106, No. 1, p. 012011). IOP Publishing.
[13] Wardhana, I. G. A. W. W., & Maulana, F. (2021). Sebuah Karakteristik dari Modul Uniserial dan Gelanggang *Uniserial. Unisda Journal of Mathematics and Computer Science (UJMC)*, 7(2), 9-18.
[14] Wardhana, I. G. A. W. (2022). The Decomposition of a Finitely Generated Module over Some Special Ring. *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*, 6(2), 261-267.
[15] Wijayanti, I. E., & Wisbauer, R. (2009). On coprime modules and comodules. Communications in *Algebra*, 37(4), 1308-1333.
[16] Yuwaningsih, D. A., & Wijayanti, I. E. (2015). On jointly prime radicals of (R, S)-modules. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, 25-34