Jurnal UJMC, Volume 8, Nomor 2, Hal. 01 - 05
pISSN : 2460-3333 eISSN : 2579-907X

Perbandingan Ideal Prima Pada Gelanggang Polinomial Bilangan Bulat dan Gelanggang Polinomial Bilangan Bulat Modulo

Daisyah Alifian Fatahilah[1]

[1] Prodi Matematika, FMIPA, Universitas mataram, daisfatahillah2@gmail.com

Abstract. A ring R can be formed into a new ring, called a polynomial ring or what is often called an $R[x]$ ring. For $R[x] = \mathbb{Z}_n[x]$ is a polynomial ring which is often referred to as an integer polynomial ring modulo n. The polynomial ring of R is the set of all polynomials with constants in the form of elements in R. In 2019 Maulana et al discussed the prime ideal properties of Gaussian integers. In this article, we will give a comparison of the prime ideal properties in the modulo integer polynomial ring with the integer polynomial ring, where if the prime ideal in integers is not necessarily prime ideal in the modulo integer ring.

Keywords**:** ring polynomial, integers modulo, prime ideal

Abstrak. Suatu gelanggang R dapat dibentuk gelanggang baru, yaitu gelanggang polinomial atau yang sering disebut dengan gelanggang $R[x]$. Untuk $R[x] = \mathbb{Z}_n[x]$ merupakan suatu gelanggang polinom yang sering disebut sebagai gelanggang polinom bilangan bulat modulo n. Gelangang polinom atas R adalah himpunan semua polinom dengan konstantan berupa unsur di R. Pada tahun 2019 Maulana dkk telah membahas mengenai sifat- sifat ideal prima pada bilangan bulat Gauss. Pada artikel ini akan diberikan perbandingan sifat-sifat ideal prima pada gelanggang polinom bilangan bulat modulo dengan gelanggang polinom bilangan bulat,,dimana jika ideal prima pada bilangan bulat belum tentu ideal prima pada gelanggang bilangan bulat modulo.

Kata Kunci**:** gelanggang polinom, bilangan bulat modulo, ideal prima

1 Pendahuluan

Ideal prima merupakan abstraksi bilangan prima yang diperkenalkan oleh Dedekind pada tahun 1871. Sifat-sifat ideal prima telah dibahas oleh Maulana dkk (2019). Sifat-sifat ideal prima pada gelanggang polinom perna diberikan oleh Amir (2011). Artikel kali ini penulis lebih memfokuskan pada perbandingan ideal prima pada gelanggang polinom bilangan bulat dengan ideal prima pada gelanggang polinom bilangan bulat modulo. Sebelum diuraikan sifat-sifat mengenai ideal prima pada gelanggang polinom bilangan bulat modulo dan gelanggang polinom bilangan bulat, akan dikenalkan beberapa definisi dan sifat-sifat dasar.

Definisi 1.1 Bilangan prima merupakan bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 yang hanya dapat di bagi oleh 1 dan dirinya

Definisi 1.2 Misalkan R suatu gelanggang, subhimpunan tak hampa $I \subseteq R$ dikatakan ideal jika memenuhi:

a. $\forall a, b \in I, a - b \in I$
b. $\forall a \in I$ dan $\forall r \in R$, $ar, ra \in I$

Salah satu ideal yang penting adalah ideal prima, yang merupakan abstraksi dari bilangan prima. Definisi ideal prima akan diberikan sebagai berikut.

Definisi 1.3 Misalkan R suatu gelanggang komutatif dan I suatu ideal dari R. Ideal I disebut ideal prima jika $I \neq R$ dan $\forall a, b \in R$ dengan $ab \in R$ berimplikasi bahwa $a \in I$ atau $b \in I$.

Apabila diberikan suatu gelanggang komutatif dapat dibuat gelanggang baru yang dinamakan gelanggang polinomial. Definisi gelanggang polinomial akan diberikan sebagai berikut.

Definisi 1.4 Misalkan R suatu gelanggang komutatif, suatu polinom dengan variabel x atas R adalah suatu pernyataan dalam bentuk $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ dengan $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $a_n \neq 0$ dan $n \in \mathbb{N}$.

Selanjutnya $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dikatakan koefesien dari polinom $p(x)$ dan n adalah derajat dari polinom $p(x)$, atau dinotasikan dengan $der(p(x) = n$. Himpunan semua polimon dengan koefesien dari gelanggang R membentuk suatu gelanggang dengan operasi tambah dan dan kali polinom, dan dinamakan gelanggang polinom dengan notasi $R[x]$.

Teorema 1.1 Apabila $p_1(x), p_2(x) \in R[x]$, maka berlaku $der\big(p_1(x)p_2(x)\big) = der\big(p_1(x)\big) + der(p_2(x)$.

Teorema 1.2 Misalkan R suatu daerah integral, maka $R[x]$ juga daerah integral.

2 Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan diberikan perbandingan ideal prima pada gelanggang polinom bilangan bulat dan gelanggang polinom bilangan bulat modulo. Yakni ideal prima pada galanggang polinom bilangan bulat akan tetapi tidak dijamin ideal prima terhadap gelanggang polinom bilangan bulat modulo.

Teorema 2.1. Ideal $\langle x \rangle$ adalah ideal prima di $\mathbb{Z}[x]$ tapi tidak selalu merupakan ideal prima pada $\mathbb{Z}_n[x]$.

Bukti: Misal $\langle x \rangle = \{kx | k \in \mathbb{Z}\}$ ideal dari $\mathbb{Z}$. Untuk $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Untuk kasus $p_1(x)p_2(x) = 0$, jelas berakibat salah satu polinom adalah polinom nol

berdasarkan Teorema 1.2. Oleh karena itu asumsikan $p_1(x)p_2(x) \neq 0$. Misalkan $p_1(x)p_2(x) \in \langle x \rangle$, artinya $p_1(x)p_2(x) = kx$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Berdasarkan Teorema 1.1, $der\big(p_1(x)p_2(x)\big) = der\big(p_1(x)\big) + der(p_2(x) = der(kx) = 1$.
Kasus pertama, misalkan -$der\big(p_1(x)\big) = 0$ dan $der(p_2(x)) = 1$, akibatnya bisa dimisalkan $p_1(x) = \alpha_0$ dan $p_2(x) = \beta_0 + \beta_1 x$. Jadi diperoleh $p_1(x)p_2(x) = \alpha_0\beta_0 + \alpha_0\beta_1 x = kx$, akibatnya $\alpha_0\beta_0 = 0$ atau $\alpha_0 = 0$ atau $\beta_0 = 0$. Untuk $\alpha_0 = 0$ didapatkan $0 = p_1(x) \in \langle x \rangle$, dan untuk $\beta_0 = 0$ diperoleh $p_2(x) = \beta_1 x \in \langle x \rangle$. Akibatnya $\langle x \rangle$ adalah ideal prima.
Kasus kedua misalkan –$der\big(p_1(x)\big) = 1$ dan $der(p_2(x)) = 0$, akibatnya bisa dimisalkan $p_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ dan $p_2(x) = \beta_0$. Jadi diperoleh $p_1(x)p_2(x) = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_0 x = kx$, akibatnya $\alpha_0\beta_0 = 0$ atau $\alpha_0 = 0$ atau $\beta_0 = 0$. Untuk $\beta_0 = 0$ didapatkan $0 = p_2(x) \in \langle x \rangle$, dan untuk $\alpha_0 = 0$ diperoleh $p_1(x) = \alpha_1 x \in \langle x \rangle$. Akibatnya $\langle x \rangle$ adalah ideal prima.
Pada gelanggang polinom $\mathbb{Z}_n[x]$, ideal $\langle x \rangle$ tidak dijamin suatu ideal prima, sebagai contoh penangkal pilih $n = 8$, $p_1(x) = 2$ dan $p_2(x) = 4$. Mudah dilihat bahwa $p_1(x)p_2(x) = 0 \in \langle x + 1 \rangle$ tapi $p_1(x), p_2(x) \notin \langle x \rangle$. ■

Teorema 2.2 Ideal $\langle x + 1 \rangle$ adalah ideal prima di $\mathbb{Z}[x]$ tapi tidak selalu merupakan ideal prima pada $\mathbb{Z}_n[x]$.

Bukti: Misal $\langle x + 1 \rangle = \{k(x + 1) | k \in \mathbb{Z}\}$ ideal dari $\mathbb{Z}$. Untuk $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Untuk kasus $p_1(x)p_2(x) = 0$, jelas berakibat salah satu polinom adalah polinom nol berdasarkan Teorema 1.2. Oleh karena itu asumsikan $p_1(x)p_2(x) \neq 0$. Misalkan $p_1(x)p_2(x) \in \langle x + 1 \rangle$, artinya $p_1(x)p_2(x) = k(x + 1)$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Berdasarkan Teorema 1.1, $der\big(p_1(x)p_2(x)\big) = der\big(p_1(x)\big) + der(p_2(x) = der(k(x + 1)) = 1$.
Kasus pertama, misalkan -$der\big(p_1(x)\big) = 0$ dan $der(p_2(x)) = 1$, akibatnya bisa dimisalkan $p_1(x) = \alpha_0$ dan $p_2(x) = \beta_0 + \beta_1 x$. Jadi diperoleh $p_1(x)p_2(x) = \alpha_0\beta_0 + \alpha_0\beta_1 x = kx + k$, akibatnya $\alpha_0\beta_0 = \alpha_0\beta_1 = \gamma$. Jadi diperoleh $p_2(x) = \gamma + \gamma x = \gamma(x + 1) \in \langle x + 1 \rangle$. Akibatnya $\langle x \rangle$ adalah ideal prima.
Kasus kedua misalkan –$der\big(p_1(x)\big) = 1$ dan $der(p_2(x)) = 0$, akibatnya bisa dimisalkan $p_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ dan $p_2(x) = \beta_0$. Jadi diperoleh $p_1(x)p_2(x) = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_0 x = kx + k$, akibatnya $\alpha_0\beta_0 = \alpha_1\beta_0 = \gamma$. Jadi diperoleh $p_1(x) = \gamma + \gamma x = \gamma(x + 1) \in \langle x + 1 \rangle$. Akibatnya $\langle x \rangle$ adalah ideal prima.
Pada gelanggang polinom $\mathbb{Z}_n[x]$, ideal $\langle x + 1 \rangle$ tidak dijamin suatu ideal prima, sebagai contoh penangkal pilih $n = 8$, $p_1(x) = 2$ dan $p_2(x) = 4$. Mudah dilihat bahwa $p_1(x)p_2(x) = 0 \in \langle x + 1 \rangle$ tapi $p_1(x), p_2(x) \notin \langle x \rangle$. ■

3 Kesimpulan

Dapat disimpulkan bahwa ideal prima pada gelanggang polinom bilangan bulat belum tentu ideal prima pada gelanggang polinom bilangan, sehingga dari pembahasan yang telah dipaparkan bahwa sifat-sifat ideal prima pada gelanggang polinom adalah:

1. Ideal $\langle x \rangle$ ideal prima di $\mathbb{Z}[x]$ tapi belum tentu ideal prima pada $\mathbb{Z}_n[x]$.
2. Ideal $\langle x + 1 \rangle$ ideal prima di $\mathbb{Z}[x]$ tapi belum tentu ideal prima pada $\mathbb{Z}_n[x]$.

4 Daftar Pustaka

[1] Alfian, M. R., Maulana, F., Switrayni, N. W., Aini, Q., Putri, D. N., & Wardhana, I. G. A. W. (2022). Prime submodul of an integer over itself. *EIGEN MATHEMATICS JOURNAL*, 27-30.

[2] Dummit, D. S. and Foote R. M. (2004). Abstract Algebra.Third Edition, JohnWiley & Sons, New York.

[2] Durbin, John R. (2000). Modern Algebra An Introduction, Fourth Edition.New York : John Wiley & Sons.

[3] Fraleigh, J. B. (2014). A First Course in Abstract Algebra Seventh Edition.United States of America : Pearson Education Limited.

[4] Gazir S, A., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2019). SUBGRUP DARI GRUP TORSI YANG DIBANGUN SECARA HINGGA PADA C. *Jurnal Pendidik Indonesia (JPIn)*, 2(1), 41-43.

[5] Gazir, A., & Wardhana, I. G. A. W. (2019). Subgrup Non Trivial Dari Grup Dihedral. *Eigen Mathematics Journal*, 73-76.

[6] Humera, B., and Raza Z. 2012. On Subgroups Lattice of Quasidihedral Group. *International Journal of Algebra*, Vol. 6, no. 25.

[7] Juliana, R., Wardhana, I. G. A. W., & Irwansyah. (2021, February). Some characteristics of cyclic prime, weakly prime and almost prime submodule of Gaussian integer modulo over integer. *AIP Conference Proceedings (Vol. 2329*, No. 1, p. 020004.

[7] Maulana, F., Wardhana, I. G. A. W., Switrayni, N. W., Aini, Q.2018. Bilangan Prima dan Bilangan Tak Tereduksi pada Bilangan Bulat Gauss. *Prosiding Seminar Nasional APPPI II* : 383-387.

[8] Maulana, F., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2019). Ekivalensi Ideal Hampir Prima dan Ideal Prima pada Bilangan Bulat Gauss. *Eigen Mathematics Journal*, 1-5.

[9] Muh. Irwan. 2015. Quaternion and it's properties, *Jurnal Matematika Statistika dan Analisis Vol 3*, No 1.

[10] Misuki, W. U., Wardhana, I. G. A. W., & Switrayni, N. W. (2021, March). Some Characteristics of Prime Cyclic Ideal On Gaussian Integer Ring Modulo. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering Vol. 1115, No. 1*, p. 012084

[10] Rahayu, S., Soviana, M., Yanita, and Nazra A. 2019. Some Properties of Representation of Quaternion Group. *Prosiding in International Conference on Basic Sciences and Its Applications, KnE Engineering*: 266–274.

[11] Switrayni, N. W., Wardhana, I. G. A. W., & Aini, Q. (2022). ON CYCLIC DECOMPOSITION OF Z-MODULE M_ {m× r}(Z_n). *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA), 5(1),* 47-51.

[10] Wardhana, I. G. A. W., Astuti, P., & Muchtadi-Alamsyah, I. (2016). On almost prime submodules of a module over a principal ideal domain. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, 38(2), 121.

[11] Wardhana, I., & Astuti, P. (2015). Karakteristik Submodul Prima Lemah dan Submodul Hampir Prima pada. *Jurnal Matematika & Sains*, 19(1), 16-20.

[12] Wardhana, I. G. A. W., Nghiem, N. D. H., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2021, November). A note on almost prime submodule of CSM module over principal ideal domain. *Journal of Physics: Conference Series Vol. 2106*, No. 1, p. 012011.

[13] Wardhana, I. G. A. W. (2022). The Decomposition of a Finitely Generated Module over Some Special Ring. *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika), 6(2)*, 261-267.