

## MODEL KONTROL OPTIMAL SIR PADA PENYAKIT CAMPAK

Awawin Mustana Rohmah<sup>1</sup>, Siti Alfiatur Rohmaniah<sup>2</sup>, Rifky Ardhana Kisno Saputra<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universitas Islam Darul Ulum, [awawin.emer@unisda.ac.id](mailto:awawin.emer@unisda.ac.id)

<sup>2</sup>Universitas Islam Darul Ulum, [sitialfiatur@unisda.ac.id](mailto:sitialfiatur@unisda.ac.id)

<sup>3</sup>Universitas Islam Darul Ulum, [rifkyardhana@unisda.ac.id](mailto:rifkyardhana@unisda.ac.id)

**Abstract.** The SIR model is one of the epidemic models to describe the spread of infectious diseases with healing and without immunity to these infections. Environmental changes can affect changes in disease patterns that can cause endemic. One of the diseases that cause endemic is Measles (Measles). Therefore, it is necessary to take preventive measures to reduce the rate of spread of the disease, the most effective measure to prevent the spread of the disease is vaccination. Measles transmission prevention events that occur in a population can be modeled in a mathematical form, one of which is the SIR model. The SIR model is divided into four subpopulations, namely the susceptible population or a subpopulation of susceptible individuals to the disease, the infected subpopulation or a subpopulation of infected individuals and can transmit the disease and the recovery subpopulation or individual subpopulation recovering from the disease. Vaccination in this case is the addition of controls to the SIR model, where before being controlled, Measles was only treated normally without vaccines, so that the disease is still common in the community. Giving the right vaccine will reduce the number of infected subpopulations, so that the recovery subpopulation will increase. In this study, the SIR model was developed with the addition of controls. The control in this model is a vaccination given to infected subpopulations, so that the recovery subpopulation has increased, because the number of infected subpopulations has decreased.

**Keywords:** *SIR Models, Optimal Control Model, Vaccination.*

**Abstrak.** Model SIR merupakan salah satu model epidemik untuk menggambarkan penyebaran penyakit infeksi dengan adanya penyembuhan dan tanpa adanya kekebalan terhadap infeksi tersebut. Perubahan lingkungan hidup dapat mempengaruhi perubahan pola penyakit yang dapat menimbulkan endemik. Salah satu penyakit yang menyebabkan endemi yaitu penyakit Campak (Measles). Oleh karena itu perlu adanya tindakan pencegahan untuk mengurangi laju penyebaran penyakit tersebut, tindakan yang dinilai paling efektif untuk mencegah penyebaran penyakit adalah dengan cara vaksinasi. Kejadian pencegahan penularan penyakit Campak yang terjadi pada suatu populasi dapat dimodelkan ke dalam bentuk matematis, salah satunya adalah model SIR. Model SIR dibagi menjadi empat subpopulasi yaitu populasi susceptible atau subpopulasi individu rentan terhadap penyakit, subpopulasi infected atau subpopulasi individu terinfeksi serta dapat menularkan penyakit dan subpopulasi recovery atau subpopulasi individu sembuh dari penyakit. Vaksinasi dalam hal ini adalah penambahan kontrol pada model SIR, dimana sebelum dikontrol, penyakit Campak hanya diobati biasa tanpa pemberian vaksin, sehingga penyakit tersebut masih banyak dijumpai di masyarakat. Pemberian vaksin yang tepat, akan menurunkan jumlah subpopulasi terinfeksi, sehingga subpopulasi recovery akan mengalami kenaikan. Pada penelitian ini mengembangkan model SIR dengan penambahan kontrol. Kontrol pada model tersebut merupakan vaksinasi yang diberikan kepada subpopulasi infected, sehingga subpopulasi recovery mengalami kenaikan, karena jumlah subpopulasi infected menurun.

**Kata Kunci:** *Model SIR, Model Kontrol Optimal, Vaksinasi.*

## **1 PENDAHULUAN**

Perkembangan ilmu pengetahuan di bidang Matematika memberikan peranan penting dalam membantu menganalisa dan mengontrol penyebaran penyakit. Kejadian – kejadian yang ada di sekitar dapat diamati dan dianalisa dalam bentuk model Matematika. Salah satu model matematika yaitu Model SIR yang merupakan salah satu model epidemik untuk menggambarkan penyebaran penyakit infeksi dengan adanya penyembuhan dan tanpa adanya kekebalan terhadap infeksi tersebut. Model matematika juga termasuk salah satu alat yang dapat membantu dalam menyelesaikan masalah di kehidupan nyata. Masalah-masalah tersebut dapat dibawa ke dalam model matematis dengan menggunakan asumsi - asumsi tertentu. Selanjutnya akan dicari solusinya baik secara analitis maupun numerik.

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, serta perubahan lingkungan hidup dapat mempengaruhi perubahan pola penyakit yang dapat menimbulkan endemi dan membahayakan kesehatan masyarakat. Salah satu penyakit yang menyebabkan endemi yaitu penyakit Campak (Measles). Oleh karena itu perlu adanya tindakan pencegahan untuk mengurangi laju penyebaran penyakit tersebut, tindakan yang dinilai paling efektif untuk mencegah penyebaran penyakit adalah dengan cara vaksinasi. Kejadian pencegahan penularan wabah penyakit Campak yang terjadi pada suatu populasi dapat dimodelkan ke dalam bentuk matematis, salah satunya adalah model SIR (Susceptible, Infected, Recovered). Pada model penyebaran penyakit, populasi dibedakan menjadi empat subpopulasi yaitu populasi susceptible atau subpopulasi individu yang rentan terhadap penyakit, subpopulasi infected atau subpopulasi individu yang terinfeksi serta dapat menularkan penyakit dan subpopulasi recovery atau subpopulasi individu yang sembuh dari penyakit.

Vaksinasi dalam hal ini adalah penambahan kontrol pada model SIR, dimana sebelum dikontrol, penyakit Campak hanya diobati biasa tanpa pemberian vaksin, sehingga penyakit tersebut masih banyak dijumpai di masyarakat. Pemberian vaksin yang tepat, akan menurunkan jumlah subpopulasi terinfeksi, sehingga subpopulasi recovery akan mengalami kenaikan. [1] melakukan analisa model SIR pada epidemik penyakit Campak berdasarkan umur dengan pengaruh imunisasi. [2] menganalisa model SIR dengan Analisa Persistensi. [3] melakukan analisa pada pengendalian optimal model penyakit.

Pada penelitian ini mengembangkan model SIR dengan penambahan kontrol. Dimana kontrol pada model tersebut merupakan vaksinasi yang diberikan kepada subpopulasi infected, sehingga subpopulasi recovery mengalami kenaikan, karena jumlah subpopulasi infected menurun.

## **2 METODE**

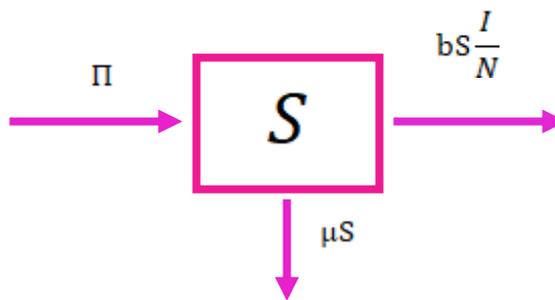
Metode yang digunakan untuk mencapai tujuan dari penelitian ini dilakukan dengan beberapa langkah. Langkah Pertama pembentukan model SIR yang kemudian dibentuk kedalam kontrol optimal dan menentukan fungsi tujuan. Selanjutnya dilakukan penyelesaian masalah optimal control, dimana untuk penyelesaian ini ada beberapa tahapan. Tahapan pertama membentuk fungsi

Hamiltonian, kemudian menurunkan fungsi Hamiltonian terhadap variabel kontrol, selanjutnya melakukan substitusi nilai kontrol optimal pada fungsi Hamiltonian, mencari state dan co-state. Sedemikian hingga diperoleh model SIR yang dikontrol.

### 3 HASIL DAN PEMBAHASAN

#### Model Matematika

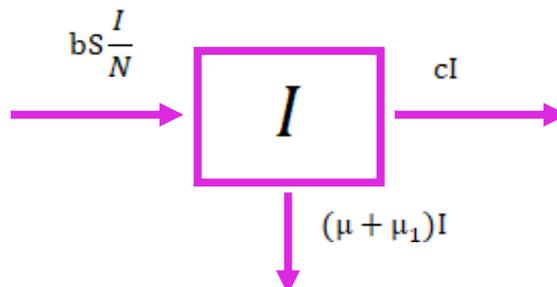
Jumlah subpopulasi  $S$  akan bertambah karena banyaknya kelahiran sebesar  $\Pi$ , namun berkurang karena adanya kematian alami dengan laju  $\mu$  serta adanya kontak antar individu  $s_i$  bertemu dengan  $i_i$  yang mengakibatkan jumlah subpopulasi  $S$  berkurang dan masuk menjadi subpopulasi  $I$  sebesar  $b$ .



Gambar 1. Diagram Kompartmen Subpopulasi *Susceptible*

Berdasarkan Gambar 1 dapat dijelaskan bahwa ada perubahan pada jumlah subpopulasi  $S$  persatuan waktu, sehingga dapat disebut  $\frac{dS}{dt}$ .

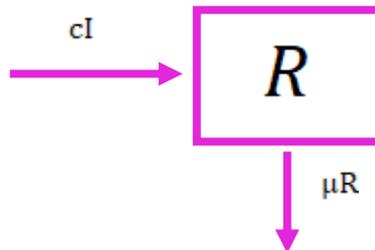
Jumlah subpopulasi  $I$  bertambah karena adanya kontak antara individu  $s_i$  bertemu dengan  $i_i$  yang mana mengakibatkan individu tersebut terinfeksi, serta berkurang karena adanya kematian alami  $\mu$  dan kematian karena terinfeksi campak sebesar  $\mu_1$ . Individu terinfeksi dilakukan penyembuhan sehingga mengakibatkan berkurangnya subpopulasi  $I$  sebesar  $c$  yang masuk dalam subpopulasi  $R$ .



Gambar 2. Diagram Kompartmen Subpopulasi *Infected*

Berdasarkan Gambar 2 dapat dijelaskan bahwa ada perubahan pada jumlah subpopulasi  $I$  persatuan waktu, sehingga dapat disebut  $\frac{dI}{dt}$ .

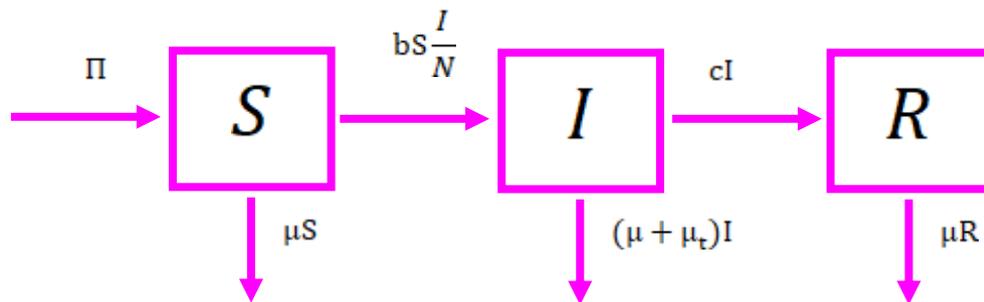
Jumlah subpopulasi  $R$  bertambah karena adanya subpopulasi terinfeksi  $I$  yang disembuhkan, namun subpopulasi  $R$  diasumsikan pada penyakit campak tidak kembali rentan, dan berkurang karena adanya kematian alami sebesar  $\mu$ .



**Gambar 3. Diagram Kompartmen Subpopulasi *Recovered***

Berdasarkan Gambar 3 dapat dijelaskan bahwa ada perubahan pada jumlah subpopulasi  $R$  persatuan waktu, sehingga dapat disebut  $\frac{dR}{dt}$ .

Dari Gambar 1, 2, dan 3 dapat digabungkan sehingga menjadi suatu sistem.



**Gambar 4. Diagram Kompartmen Model Matematika SIR**

Berdasarkan uraian dan diagram kompartmen tersebut, sehingga dapat dibentuk sistem sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \pi - bS \frac{I}{N} - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= bS - [c + \mu + \mu_1]I \\ \frac{dR}{dt} &= cI - \mu R \end{aligned}$$

Dengan

- $S(t)$  : banyaknya individu rentan ( $S$ ) pada waktu  $t$ ,
- $I(t)$  : banyaknya individu terinfeksi ( $I$ ) pada waktu  $t$ ,
- $R(t)$  : banyaknya individu sembuh ( $R$ ) pada waktu  $t$ ,
- $\pi$  : angka kelahiran individu rentan,

$b$  : laju kontak pada klas terinfeksi,  
 $\mu$  : angka kematian alami,  
 $\mu_1$  : angka kematian karena penyakit,  
 $c$  : laju kesembuhan.

### Model Kontrol Optimal

Pada model matematika tersebut, selanjutnya dilakukan kontrol optimal dengan menambahkan kontrol yaitu  $u$  pada subpopulasi *infected* ( $I$ ) [4]. Sehingga model matematika tersebut menjadi berikut.

$$\frac{dS}{dt} = \pi - bS \frac{I}{N} - \mu S \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = bS - [c + \mu + \mu_1 + u]I \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = cI - \mu R + uI \quad (3)$$

Dengan meminimumkan biaya untuk mengontrol populasi yang terinfeksi, sehingga dibentuk fungsi objektif sebagai berikut.

$$J(U) = \int_{t_f}^{t_o} \left( \frac{P * u^2}{2} + I \right) dt \quad (4)$$

#### 1. Membentuk Persamaan Hamiltonian

Berdasarkan Persamaan (1), (2), (3), dan (4) dapat dibentuk persamaan Hamiltonian berikut.

$$\begin{aligned} H &= V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t) * f(x(t), u(t), t) \\ &= I + \frac{P * u^2}{2} + \lambda_1 \left( \pi - bS \frac{I}{N} - \mu S \right) + \lambda_2 (bS - [c + \mu + \mu_1 + u]I) \\ &\quad + \lambda_3 (cI - \mu R + uI) \end{aligned}$$

Menentukan Kontrol Optimal dengan menurunkan  $H$  terhadap  $u$ , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= Pu - \lambda_2 I + \lambda_3 I \\ Pu &= \lambda_2 I - \lambda_3 I \\ u &= \frac{\lambda_2 I - \lambda_3 I}{p} \end{aligned}$$

Kemudian nilai  $u^*$  atau  $u$  optimal disubstitusikan terhadap  $H$  awal. Sehingga diperoleh Hamiltonian Optimal sebagai berikut.

$$H^* = I + \frac{I}{2P} (\lambda_2^2 I^2 + \lambda_3^2 I^2 - \lambda_2 \lambda_3 I^2) + \lambda_1 \left( \pi - bS \frac{I}{N} - \mu S \right)$$

$$\begin{aligned}
 & +\lambda_2 \left( bS \frac{I}{N} - \left[ c + \mu + \mu_1 + \left( \frac{\lambda_2 I - \lambda_3 I}{p} \right) \right] I \right) \\
 & +\lambda_3 \left( cI - \mu R + \left( \frac{\lambda_2 I - \lambda_3 I}{p} \right) I \right)
 \end{aligned}$$

## 2. Menentukan State dan Co-State

Setelah diperoleh  $H^*$ , selanjutnya diturunkan terhadap SEIR. Bentuk State dari sistem tersebut adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \dot{S} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \pi - bS \frac{I}{N} - \mu S \\
 \dot{I} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = bS \frac{I}{N} - \left( c + \mu + \mu_1 + \left( \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{p} \right) I \right) I + \frac{I}{P} (\lambda_2 I^2 - \lambda_3 I^2) \\
 \dot{R} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = cI - \mu R + \left( \left( \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{p} \right) I \right) I + \frac{I}{P} (\lambda_2 I^2 - \lambda_3 I^2)
 \end{aligned}$$

Bentuk Co-State dari sistem tersebut diperoleh dari turunan  $H^*$  terhadap masing – masing  $\lambda$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_1 &= \frac{\partial H}{\partial S} = - \left[ \left( -\lambda_1 b \frac{I}{N} - \mu \right) + \left( \lambda_2 b \frac{I}{N} \right) \right] \\
 \dot{\lambda}_2 &= \frac{\partial H}{\partial E} = - \left[ \left( \frac{I}{P} \lambda_2^2 I + \frac{I}{P} \lambda_3^2 I - \frac{I}{P} \lambda_2 \lambda_3 I \right) - \left( \lambda_1 b S \frac{N - I}{N^2} \right) \right] \\
 & \quad + \left( \lambda_2 b S \frac{N - I}{N^2} - \left( c + \mu + \mu_1 + \left( \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{p} \right) \right) \right) + \lambda_3 c \\
 & \quad + 2\lambda_3 I \left( \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{p} \right) \\
 \dot{\lambda}_3 &= \frac{\partial H}{\partial I} = -[-\lambda_3 \mu]
 \end{aligned}$$

Berdasarkan model SIR yang dilakukan kontrol untuk menurunkan subpopulasi terinfeksi serta kenaikan pada subpopulasi sembuh, yaitu bentuk fungsi state dan co- state. Fungsi tujuan untuk kontrol model SIR yaitu meminimumkan biaya vaksinasi.

## 4 KESIMPULAN

Berdasarkan pembentukan model SIR dan penyelesaian yang dilakukan kontrol (pengendalian optimal), dapat disimpulkan bahwa Pengendalian optimal dari model SIR diperoleh bentuk state dan co-state. Dimana model tersebut

merupakan hasil dari penurunan Hamiltonian untuk mendapatkan pengendalian optimal pada model SIR.

## **5 Daftar Pustaka**

- [1] A. Azizah A N, “Model SIR pada epidemi Penyakit campak berdasarkan Umur dengan Pengaruh Imunisasi,” *J. Ilm. Mat. UNESA*, vol. 3, 2017.
- [2] A. M. Rohmah, “Solusi Model SIR,” *J. UJMC*, vol. 3, pp. 21–28, 2017.
- [3] R. A. K. Rohmah, Awawin Mustana; Saputra, “Pengendalian Optimal Model Penyakit,” *J. Ilm. Tektonis*, vol. 5, no. 2, pp. 117–121, 2019.
- [4] N. S. D, *Optimal Control System*. USA: CRC Press LCC, 2002.