Jurnal UJMC, Volume 8, Nomor 1, Hal. 27 - 34
pISSN : 2460-3333 eISSN : 2579-907X

Mendeskripsikan Grup Menggunakan Berbagai Graf

Udayana Devandra[1], Luh Chandini Anjali[2]

[1] Institut Sains dan Teknologi Nasional, andra.udayana.devandra@gmail.com
[2] Institut Sains dan Teknologi Nasional, dinichandini14@gmail.com

Abstract. Drawing groups using graphs is a hot topic because groups that were once abstract can be visualized using this method. In this study, the visuals of groups will be using the coprime graphs, the non-coprime graphs, the power graphs, and the intersection graphs. Some of the results obtained are group depictions using graphs to obtain multipartite graphs or complete graphs.

Keywords**:** *coprime graph, non-coprime graph, power graph, intersection graph.*

Abstrak. Penggambaran grup menggunakan graf adalah topik yang lagi hangat dikarenakan grup yang dulunya abstrak mampu dibuat visual dengan metode ini. Pada studi ini akan diberikan visual dari grup menggunakan graf koprima, graf non-koprima, graf pangkat dan graf irisan. Beberapa hasil yang diperoleh adalah penggambaran grup menggunakan graf diperoleh graf yang multipartit atau graf lengkap.

Kata Kunci**:** *graf koprima, graf non-koprima, graf pangkat, graf irisan.*

1 Pendahuluan

Grup adalah objek matematika yang abstrak, dimana di anatara anggota grup tidak memiliki suatu keterkaitan khusus. Suatu himpunan tak hampa dengan operasi biner yang dioperasikan pada himpunan tersebut dikatakan grup apabila memenuhi kriteria seperti di antara anggotanya bersifat asosiatif, terdapat unsur nol pada himpunan tersebut dan setiap anggotanya punya unsur negatif. Beberapa contoh grup yang populer adalah grup bilangan bulat, grup bilangan bulat modulo, grup dihedral, grup quartenion yang diperumum.

Dalam matematika, apabila dimiliki sejumlah objek dan kaitan tertentu antara objek-objek tersebut, maka dapat didefinisikan suatu struktur yang dinamakan graf. Ilmu yang mempelajari graf dinamkaan teori graf. Teori graf ternyata memiliki banyak aplikasi misalnya pada bidang kimia, transportasi, game, penjadwalan, pendesainan chip hingga di industri.

Salah satu pemanfaatan graf yang lagi popular adalah dengan memanfaatkan graf untuk menggambarkan grup sehingga tidak lagi terlihat abstrak. Dengan graf dapat dikonstruksi kaitan antara anggota-anggota grup, diameter grup, jarak antara anggota-anggota grup hingga bentuk dari grup itu sendiri. Pada artikel ini akan dibahas berbagai graf yang dapat digunakan untuk mendeskripsikan grup, seperti graf koprima, graf non-koprima, graf pangkat, hingga graf irisan.

2 Pendeskripsian Grup Menggunakan Graf

2.1 Graf Koprima

Graf koprima diperkenalkan oleh Ma dkk sebagai graf dengan himpunan simpul-simpul terdiri dari semua angggota grup dan ketetanggaan dua buah simpul didefinisikan apablia orde dari dua simpul tersebut relatif prima [1]. Graf koprima dari suatu grup diberikan pada definisi berikut.

Definisi 2.1 [2].
Graf koprima dari grup G, dinotasikan dengan Γ_G adalah graf dengan himpunan simpul semua elemen dari grup G dan dua simpul u dan v dikatakan bertetangga jika dan hanya jika $(|a|,|b|) = 1$.

Juliana menemukan bahwa graf koprima dari grup bilangan bulat modulo merupakan suatu graf multipartite, hal ini diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2.1 [3].
Jika $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_j^{k_j}$, dimana $p_1, p_2, \cdots, p_j$ adalah bilangan prima yang berbeda dan $k_1, k_2, \cdots, k_j \in \mathbb{N}$, maka graf koprima dari $\mathbb{Z}_n$ adalah graf $(j+1)$-partit.
Bukti:
Misalkan $\mathbb{Z}_n$ adalah grup bilangan bulat modulo n, dengan $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_j^{k_j}$, dimana $p_1, p_2, \cdots, p_j$ adalah bilangan prima yang berbeda dan $k_1, k_2, \cdots, k_j \in \mathbb{N}$. Jelas $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \cdots, (p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_j^{kj}) - 1\}$. Setiap $a \in \mathbb{Z}_n$ dengan $(a, n) \neq 1$, dapat ditulis sebagai $a = p_1^{l_1} p_2^{k_2} \cdots p_j^{k_j}$ dengan $l_i \leq k_i$. Ini mengakibatkan $|a| = (p_1^{k_1-l_1} p_2^{k_2-l_2} \ldots p_j^{k_j-l_j})$. Sebarang $b \in \mathbb{Z}_n$ dengan $(b, n) = 1$, didapatkan $|b| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_j^{k_j}$. Jadi $\mathbb{Z}_n = \{0,1,2, \ldots (p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_j^{kj}) - 1\}$ dapat dipartisi sebagai berikut.

$$V_1 = \{0\}$$
$$V_2 = \{a_1, a_2, \cdots, a_j\} \text{ dengan } |a_i| = \Pi_{w=1}^{j} p_w^{\alpha_w}, 0 \leq \alpha_w \leq k_w, \alpha_1 \neq 0$$
$$V_3 = \{b_1, b_2, \ldots, b_j\} \text{ dengan } |b_i| = \Pi_{w=2}^{j} p_w^{\alpha_w}, 0 \leq \alpha_w \leq k_w, \alpha_2 \neq 0$$
$$\vdots$$
$$V_{j+1} = \{q_1, q_2, \ldots q_j\} \text{ with } |q_i| = p_j^{\alpha_j}, 0 \leq \alpha_j \leq k_j$$

Jadi, 0 bertetanggan dengan semua $x \in V_i, i = 2, 3, \cdots, j+1$. Beberapa $u \in V_i$ juga bertetangga dengan $v \in V_l$, $i \neq l$. Jadi, graf koprima yang terbentuk dari $\mathbb{Z}_n$ adalah graf $(j+1)-$partit.■

Syarifudin menemukan bahwa graf koprima dari grup dihedral juga merupakan suatu graf multipartite, hal ini serupa dengan yang diberikan teorema diatas, hanya dengan sedikit perbedaan, hal tersebut diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2.2 [4].
Misal $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \ldots p_m^{k_m}$ dimana $1 \leq i \leq m$, p_i adalah bilangan prima yang berbeda, dan $p_i \neq 2$ maka graf koprima dari D_{2n} adalah $(m + 2)$-partit.
Bukti:
Misalkan D_{2n} suatu dihedral group dengan $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \ldots p_m^{k_m}$ dimana $1 \leq i \leq m$, p_i adalah bilangan prima yang berbeda, $p_i \neq 2$. Berikutnya didefinisikan beberpa himpunan, himpunan pertama terdiri dari unsur-unsur yang berorde 1, himpunan kedua terdiri dari unsur-unsur yang berorde 2, atau genap, dan himpunan ketiga adalah himpunan yang terdiri dari unsur-unsur yang berorde p_1 dan ganjil, dan himpunan ke-$(m + 2)$ terdiri dari unsur-unsur berorde p_m, ganjil, dan p_j tidak membagi p_m dimana $1 \leq j \leq m - 1$, jelas himpunan-himpuna ini membentuk suatu partisi dari D_{2n}. Misal $x, y \in V_i$, maka $p_i | ord(x)$ dan $p_i | ord(y)$, jadi $(ord(x), ord(y)) \neq 1$, akibatnya x dan y tidak bertetangga. Sehingga, graf koprima dari D_{2n} adalah graf $(m + 2)$-partit.■

Hasil serupa juga didapatkan oleh Nurhabibah pada grup quaternion

Teorema 2.3 [5].
Misal Q_{4n} adalah grup quaternion yang diperumum. Jika $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$, $p_1 = 2$, p_i adalah bilangan prima yang berbeda, maka graf koprima dari Q_{4n} adalah graf $(m + 1)$-partit.
Bukti:
Pertama, asumsikan bahwa $p_i < p_j$ untuk $i < j$, lalu definisikan $m + 1$ subhimpunan dari Q_{4n}. Subhimpunan pertama adalah himpunandengan elemen berorder $n_1 = 1$ atau, tepatnya, $P_1 = \{e\}$. Untuk $j = 2, \ldots, m + 1$, didefinisikan partisi P_j, yang mana merupakan himpunan dengan unsur berorde n_j dimana $p_{j-1} | n_j$ tapi $p_s \nmid p_j$ untuk setiap $s < j$. Dengan pendefinisian ini, semua $m + 1$ subhimpunan membentuk partisi bagi Q_{4n}. Untuk $j > 0$, order elemen-elemen dari P_j tidak relatif prima, or atau ordenya dapat dibagi p_j. Akibatnya graf koprima dari Q_{4n} adalah $m + 1$ partit. ■

Setelah bentuk graf dari grup ditemukan, maka berbagai numerical invarian dari grafnya juga bisa didapatkan [6]. Berikutnya akan dibahas dual dari graf koprima yang dinamakan graf non-koprima.

2.2 Graf Non-Koprima

Graf non-koprima pertama kali diperkenalkan dengan Mansoori [7] yang merupakan dual dari graf koprima, dimana himpunan simpul-simpulnya adalah semua anggota grup, kecuali identitas. Dan dua simpul dikatakan bertetangga apabila ordenya tidak relatif prima. Definisi graf non-koprima diberikan pada definisi berikut:

Definisi 2.2 [8].
Graf non-koprima dari grup G adalah graf dengan himpunan simpul semua elemen dari grup $G \backslash \{e\}$ dan dua simpul u dan v dikatakan bertetangga jika dan hanya jika $(|a|, |b|) \neq 1$.

Masriani menukan suatu hasil yang menarik untuk kasus pangkat prima dari grup bilangan bulat modulo.

Teorema 2.4 [8].
Jika $n = p^s$, untuk suatu bilangan prima p dan bilangan aski $s \geq 2$, maka graf non-koprima dari $\mathbb{Z}_n$ adalah graf lengkap.
Bukti:
Misalkan a adalah unsur di $\mathbb{Z}_{p^s}$ dengan $(p^s, a) \neq 1$. Unsur a dapat dituliskan dengan $a = p^k q$, untuk suatu $1 \leq k < s$ dan bilangan bulat q, dimana $(p, q) = 1$. Akibatnya, didapatkan $|a| = p\ s - k$. Juga, untuk sebarang $b \in \mathbb{Z}_{p^s}$ dengan $(p^s, b) = 1$, diperoleh $|b| = p^s$. Ini mengakibatkan $(|a|, |b|) \neq 1$, untuk semua $b \in Z_{p^s} - \{0\}$. Jadi, a dan b bertetangga untuk semua $b \in Z_{p^s} - \{0\}$. Maka graf non-koprima dari $\mathbb{Z}_{p^s}$ adalah graf lengkap $K_{p^s - 1}$. ■

Untuk grup dihedral studi dilakukan oleh Misuki dkk

Teorema 2.5 [9].
Misalkan D_{2n} adalah grup dihedral . Jika $n = p^m$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$ dan p adalah bilangan prima ganjil, maka graf non-koprima dari D_{2n} dapat dipartisi menjadi dua graf lengkap.
Bukti:
Partisi $D_{2n} - \{e\}$ menjadi dia himpunan disjoin $G_1 = \{a, a^2, \dots, a^{p^m - 1}\}$ dan $G_2 = \{b, ab, \dots, a^{p^m - 1}b\}$. Jelas p membagi order tiap $x \in G_1$ dan 2 membagi setiap $y \in G_2$. Akibatnya didapatkan setiap unsur di G_1 bertetangga, demikian juga tiap unsur di G_2 juga bertetangga. Tapi $(x, y) = 1$, akibtanya setiap $x \in G_1$ dan setiap $y \in G_2$ tidak bertetangga. Sehingga G_1 dan G_2 adalah dua graf lengkap yang disjoint. ■

Selanjutnya akan dibahas graf lain untuk menggambarkan suatu grup, graf ini disebut dengan graf pangkat.

2.3 Graf Pangkat

Graf pangkat didefinisikan pada suatu grup dimana himpunan simpulnya adalah semua anggota grup, dan dua simpul dikatakan bertetangga apabila merupakan pangkat salah satunya.

Definisi 2.3 [10].
Graf pangkat dari grup G didefinisikan sebagai graf yang himpunan simpulnyanya adalah semua elemen dari G dan dua simpul berbeda $x, y \in G$ bertetangga jika dan hanya jika $x = y^k$ atau $y = x^c$ untuk suatu k dan c bilangan bulat positif.

Asmarani meneliti terkait graf pangkat pada tahun 2021 dan mendapatkan beberapa sifat terkait graf pangkat pada grup dihedral, salah satu hasil utama dari penelitian tersebut adalah.

Teorema 2.6 [11].
Jika $n = p^m$ dengan p bilangan prima dan suatu m bilangan asli, maka graf pangkat dari grup dihedral D_{2n} memiliki dua subgraf yang tidak disjoint yaitu subgraf lengkap dan subgraf bintang.
Bukti:
Misalkan $D_{2n} = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, \dots, a^{n-1}b\}$, grup dihedral dengan $n = p^m$ dimana p bilangan prima dan suatu m bilangan asli. Partisi grup menjadi tiga subhimpunan partisi, yaitu

$$V_1 = \{e\}$$
$$V_2 = \{a, a2, \dots, an - 1\}$$
$$V_3 = \{b, ab, a2b, \dots, an - 1b\}$$

Perhatikan bahwa $V_1 \cup V_2$ merupakan subgrup siklik dari D_{2n} yang dibangun oleh a dengan $|V_1 \cup V_2| = n$, sehingga graf pangkat yang dibentuk oleh V_1 dan V_2 adalah graf lengkap. Kemudian perhatikan partisi V_1 dan V_3, mudah dilihat bahwa $b.a^k = a^{n-k}b$ dan $b^{-1} = b$ (lihat referensi [12]), akibatnya $x^2 = (a^k b)(a^k b) = a^k b.a^k b = a^k a^{n-k} bb = a^{n+k-k} bb = an = e$ sehingga didapat $x = a^k b, k \in \{1, \dots ., n - 1\}$ adalah unsur refleksi. Hal ini berarti semua anggota di V_3 memiliki orde 2 dan inversnya adalah dirinya sendiri yang berakibat hasil pangkat dari anggota-anggota V_3 adalah dirinya sendiri atau e. Dan untuk sembarang a^k dengan $1 \leq k \leq n - 1$ adalah suatu pangkat dari a yang berarti bukan merupakan suatu pangkat dari anggota-anggota V_3. Jadi berdasarkan definisi graf pangkat, semua anggota partisi V_3 hanya beretetangga dengan e (anggota partisi V_1) sehinga terbentuk graf bipartit lengkap, kemudian karena V_1 hanya terdiri dari satu simpul maka disebut graf bintang. Sehingga diperoleh bahwa graf pangkat dari grup dihedral D_{2n} Dimana $n = p^m$ dengan p bilangan prima dan suatu m bilangan asli adalah graf yang terdiri dari dua subgraf yang tidak disjoint yaitu berupa subgraf lengkap dan subgraf bintang. ∎

Berikutnya akan dibahas penggambaran suatu grup menggunakan graf irisan.

2.4 Graf Irisan

Berbeda dari penggambaran grup dengan menggunakan graf yang dibahas sebelumnya, pada bagian ini simpul-simpulnya tidak lagi merupakan anggota grup, tapi merupakan subgrup tak trivial, dengan dua simpul dikatakan bertetangga apabila irisannya bukan subgrup identitas.

Definisi 2.4 [13].
Misalkan G grup hingga, graf irisan dari G adalah graf tak-berarah dengan simpul yang terdiri dari semua subgrup non-trivial dari G dan dua simpul berbeda H dan K bertetangga jika dan hanya jika $H \cap K \neq \{e\}$.

Salah satu studi graf irisan pada grup dihedral dilakukan oleh Nurhabibah, dan dituangkan dalam teorema berikut

Teorema 2.7 [13].
Jika D_{2n} grup dihedral dengan $n = p^2$, maka graf irisan D_{2n} memiliki subgraf lengkap K_{p+2}.

Bukti.
Misalkan D_{2n} grup dihedral. Ambil $n = p^2$ dengan p bilangan prima sebarang. D_{2p^2} memiliki dua buah subgrup rotasi, yaitu $R_1 = \{e, a, a^2 , a^3, \dots , a^{n-1} \}$ dan $R_2 = \{e, a^p , a^{2p} , \dots , a^{n-p}\}$, p^2 buah subgrup refleksi yaitu $S_i = \{e, a^i b\}$ untuk $i = 0, 1, 2, \dots , p^2 - 1$ dan juga memiliki p buah subgrup campuran, yaitu $C_j = \{e, a^p , a^{2p} , \dots , a^{n-p} , a^j b, a^{j+p} b, \dots, a^{j+n-p} b\}$ untuk $j = 0, 1, 2, \dots, p - 1$. Setiap H, K subgrup rotasi atau campuran yang berbeda, berlaku $H \cap K \neq \{e\}$, artinya H dan K selalu bertetangga. Dengan demikian subgrup rotasi dan campuran membentuk subgraf lengkap dari D_{2n} , yaitu subgraf K_{p+2} .■

3 Kesimpulan

Penggambaran grup menggunakan graf tidak hanya digambarkan dengan simpul-simpul berupa anggota grup, tapi juga simpul-simpul berupa subgrup. Baik simpul-simpul berupa anggota grup atau subgrup mampu mampu membuat grup memiliki bentuk yang tidak abstrak. Penggambaran grup menggunakan graf koprima, graf non-koprima, graf pangkat dan graf irisan juga menjadikan grup bisa dipelajari secara visual.

4 Daftar Pustaka

[1] X. Ma, H. Wei, and L. Yang, “The Coprime graph of a group,” *International Journal of Group Theory*, vol. 3, no. 3, pp. 13–23, 2014, doi: 10.22108/ijgt.2014.4363.

[2] A. Gazir S, I. G. A. W. Wardhana, N. W. Switrayni, and Q. Aini, “Some Properties of Coprime Graph of Dihedral Group D_2n When n is a Prime Power,” *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, vol. 3, no. 1, pp. 34–38, 2020, doi: 10.14710/jfma.v3i1.7413.

[3] R. Juliana, M. Masriani, I. G. A. W. Wardhana, N. W. Switrayni, and I. Irwansyah, “COPRIME GRAPH OF INTEGERS MODULO n GROUP AND ITS SUBGROUPS,” *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, vol. 3, no. 1, pp. 15–18, 2020, doi: 10.14710/jfma.v3i1.7412.

[4] A. G. Syarifudin, Nurhabibah, D. P. Malik, and I. G. A. W. dan Wardhana, “Some characterizatsion of coprime graph of dihedral group D2n,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1722, no. 1, 2021, doi: 10.1088/1742-6596/1722/1/012051.

[5] N. Nurhabibah, A. G. Syarifudin, and I. G. A. W. Wardhana, “Some Results of The Coprime Graph of a Generalized Quaternion Group Q_4n,” *InPrime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 3, no. 1, pp. 29–33, 2021, doi: 10.15408/inprime.v3i1.19670.

[6] A. G. Syarifudin, I. G. A. W. Wardhana, N. W. Switrayni, and Q. Aini, "The Clique Numbers and Chromatic Numbers of The Coprime Graph of a Dihedral Group," *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, vol. 1115, no. 1, p. 012083, 2021, doi: 10.1088/1757-899x/1115/1/012083.

[7] F. Mansoori, A. Erfanian, and B. Tolue, "Non-coprime graph of a finite group," *AIP Conference Proceedings*, vol. 1750, no. June 2016, 2016, doi: 10.1063/1.4954605.

[8] M. Masriani, R. Juliana, A. G. Syarifudin, I. G. A. W. Wardhana, I. Irwansyah, and N. W. Switrayni, "SOME RESULT OF NON-COPRIME GRAPH OF INTEGERS MODULO n GROUP FOR n A PRIME POWER," *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, vol. 3, no. 2, pp. 107–111, 2020, doi: 10.14710/jfma.v3i2.8713.

[9] W. U. Misuki, I. G. A. W. Wardhana, N. W. Switrayni, and Irwansyah, "Some results of non-coprime graph of the dihedral group D2n for n a prime power," *AIP Conference Proceedings*, vol. 2329, no. February, 2021, doi: 10.1063/5.0042587.

[10] T. Chelvam and M. Sattanathan, "Power graph of finite abelian groups," *Algebra and Discrete Mathematics*, vol. 16, no. 1, pp. 33–41, 2013.

[11] E. Y. Asmarani, A. G. Syarifudin, G. Adhitya, W. Wardhana, and W. Switrayni, "Eigen Mathematics Journal The Power Graph of a Dihedral Group," vol. 4, no. 2, 2021, doi: 10.29303/emj.v4i2.117.

[12] A. Gazir and I. G. A. W. Wardhana, "Subgrup Non Trivial Dari Grup Dihedral," *EIGEN MATHEMATICS JOURNAL*, vol. 1, no. 2, p. 73, Dec. 2019, doi: 10.29303/emj.v1i2.26.

[13] N. Nurhabibah, A. Gazir Syarifudin, I. Gede Adhitya Wisnu Wardhana, and Q. Aini, "Eigen Mathematics Journal The Intersection Graph of a Dihedral Group," vol. 4, no. 2, 2021, doi: 10.29303/emj.v4i2.119.