Jurnal UJMC, Volume 8, Nomor 1, Hal. 35 - 42
pISSN : 2460-3333 eISSN : 2579-907X

# Dekomposisi dari Modul Yang Dibangun Secara Hingga Atas Beberapa Ring Khusus

Gagah Nataprawira[1]

[1]Universitas Singaperbangsa Karawang, Indonesia, gagah.nataprawira@gmail.com

**Abstract.** This study wants to provide a decomposition of the module that was built into a number of special rings, such as the principal ideal domain or the Dedekind domain. The main result of this study is that the decomposition of the finitely generated module is the direct sum of the torsion module and the independent module when the ring is the principal ideal domain. When the ring is the Dedekind domain, the decomposition is the direct sum of the projective module and the torsion module

***Keywords*:** *Dedekind domain; principal ideal domain; free module; torsion module; torsion-free module.*

**Abstrak.** Penelitian ini ingin memberikan dekomposisi dari modul yang dibangun Secara hingga atas beberapa ring khusus, seperti daerah ideal utama atau daerah Dedekind. Hasil utama dari penelitian ini mendapatkan dekomposisi modul yang dibangun secara hingga adalah jumlah langsung dari modul torsi dan modul bebas saat ring adalah daerah ideal utama. Saat ring adalah daerah Dedekind, didapatkan dekomposisi merupakan tambah langsung dari modul projektif dan modul torsi.

***Kata Kunci*:** *daerah Dedekind; daerah ideal utama, modul bebas, modul torsi, modul bebas torsi*.

## 1 Pendahuluan

Dekomposisi ruang vektor atau matriks adalah alat yang sangat penting untuk banyak ilmu terapan. Metode analisis regresi banyak digunakan, dari prakiraan cuaca hinga ke ilmu data sains [1], rantai Markov dalam model stokastik [2], dan model intervensi semuanya menggunakan dekomposisi matriks atau ruang vektor [3]. Dalam matematika murni, matematikawan ingin mengetahui dekomposisi dari struktur aljabar yang lebih umum dari ruang vektor, bernama modul. Dekomposisi modul membantu matematikawan untuk menemukan karakterisasi struktur aljabar, seperti karakterisasi hampir prima dari modul bebas [4], karakterisasi hampir prima dari modul modulo bilangan bulat [5], dan matriks [6], karakterisasi prima siklik [7], karakterisasi modul Bezout [8] dan modul Bezout umum [9], U-modul kompleks [10], Injectivity & Projectivity of a module [11], modul uniserial [12], kode linier [13], F- Modul CS-Rickart [14], modul T-small [15], karakteristik submodul prima lemah [16], atau karakterisasi modul CMS [17].

Dalam struktur aljabar lain, ada beberapa penelitian yang menggunakan dekomposisi ring. Studi terbaru adalah menemukan karakterisasi ideal hampir prima pada modulo ring Gaussian [18] dan karakterisasi ideal siklik prima pada modulo integer Gaussian [19].

Pada artikel ini, kami akan memberikan beberapa dekomposisi dari modul yang dihasilkan hingga beberapa ring khusus, bernama domain ideal utama dan domain Dedekind. Sebagai ring, domain ideal utama ring sangat populer, dengan kata lain, studi tentang domain Dedekind tergolong langka. Namun beberapa penelitian seputar ring ini sendiri dapat ditemukan, seperti yang dilakukan oleh Kusniyanti pada tahun 2016 [20]. Itulah mengapa dekomposisi modul yang dihasilkan secara terbatas di atas daerah Dedekind adalah penting.

# 2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pembuktian deduktif berdasarkan studi pustaka berupa buku-buku dan jurnal ilmiah, khususnya yang berkaitan dengan teori modul. Studi awal yang dilakukan adalah mempelajari dekomposisi siklik dari modul yang dihasilkan hingga pada domain ideal utama. Kemudian dibahas bentuk dekomposisi modul yang dibangkitkan hingga pada beberapa ring khusus. Ring khusus terdiri dari dua ring populer, yaitu daerah ideal utama dan daerah Dedekind.

# 3 Hasil dan Pembahasan

## 3.1 Dekomposisi Modul yang Dibangun Secara Hingga Atas Daerah Ideal Utama

Pertama, akan diberikan dekomposisi modul yang dibangun secara hingga pada daerha ideal utama. Definisi dasar di bawah ini.

**Definisi 1.1** Misal $M$ suatu $R$-modul, dan $m \in M$ disebut elemen torsi jika terdapat elemen tak nol $r \in R$ such sehingga $rm = 0$. Jika semua elemen $M$ adalah elemen torsi, maka $M$ dikatakan modul torsi. Jika tidak ada elemen torsi di $M$, maka $M$ dikatakan modul bebas torsi.

Untuk $R$-modul $M$, semua unsur torsi dari $M$ disimbolkan dengan $M_{tor}$. Contohnya, semua unsur torsi dari $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}_4$ dan $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$ adalah $\{0\}$ dan $\mathbb{Z}$, akibatnya $\mathbb{Z}_4$ adalah modul torsi dan $\mathbb{Z}$ adalah modul bebas torsi.

Jika $m$ adalah elemen torsi dari suatu modul, maka semua skalar yang membuat $m$ nol dikatakan annihilator dari $m$.

**Definisi 1.2.** Misal $M$ suatu $R$-modul, dan $x \in M$, maka *annihilator* dari $x$ adalah $ann(x) = \{r\ di\ R | r\ x = 0\}$ , dan *annihilator* dari $M$ adalah $ann(M) = \{r\ di\ R | r\ M = 0\}$.

Beberapa sifat dasar dari pendefinisian annihilator dan elemen torsi diberikan pada Teorema-teorema di bawah.

**Teorema 1.1.** Misal $M$ suatu modul atas daerah ideal utama $R$, dan $x \in M$. *Annihilator* $ann(x)$ dan $ann(M)$ adalah suatu ideal dari $R$, dan unsur pembangun dari ideal $ann(x)$ disebut *order* dari $x$, dan unsur pembangun dari of $ann(M)$ disebut *order* dari $M$.

**Bukti**:

Lihat [4] ■

**Teorema 1.2.** Misal $M$ suatu modul atas daerah ideal utama $R$. Himpunan $M_{tor}$ membentuk submodul dari $M$.
**Bukti**:
Lihat [4] ■
Submodul $M_{tor}$ disebut submodul torsi dari modul $M$. Sebaliknya, himpunan semua himpunan yang tidak mengandung unsur torsi disebut submodul bebas torsi.
**Definisi 1.3.** Misal $M$ suatu modul atas daerah ideal utama $R$. Modul $M$ dikatakan modul bebas torsi jika nol adalah satu-satunya unsur torsi di $M$.
Jika diberikan suatu submodul torsi, maka modul faktornya merupakan modul bebas torsi.
**Teorema 1.3.** Misal $M$ suatu modul atas daerah ideal utama $R$. Modul faktor $M/M_{tor}$ adalah modul bebas torsi.
**Bukti**:
Misal $x + M_{tor} \in M/M_{tor}$ adalah unsur tak nol. Jika $x + M_{tor}$ suatu elemen torsi, maka terdapat $r \neq 0$ sehingga $r(x + M_{tor}) = (0 + M_{tor})$. Akibatnya didapatkan $rx$ adalah unsur torsi, atau terdapat $k \neq 0$ sedemikian hingga $k(rx) = (kr)x = 0$. Ini berarti terdapat unsur tak nol $kr \in R$ sedemikian hingga $kr \neq 0$ dengan $(kr)x = 0$, akibatnya $x$ unsur torsi. Lebih lanjut $x + M_{tor} = 0 + M_{tor}$ (kontradiksi). Jadi $x + M_{tor}$ bukan unsur torsi, akibatnya $M/M_{tor}$ adalah modul bebas torsi.■
Hasil yang menarik, bahwa submodul bebas torsi harus menjadi modul bebas kapan pun ringnya utama.
**Teorema 1.4.** Jika $M$ modul bebas torsi yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama $R$, maka $M$ adalah modul bebas.
**Bukti:**
Misalkan $M$ dibangun oleh $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Jika $X$ bebas linier maka jelas $M$ adalah modul bebas, jadi asumsikan $X$ bergantung linier.
Misal $P$ adalah koleksi subhimpunan dari $X$ yang bebas linier. Jelas $P \neq \emptyset$ karena himpunan yang terdiri dari satu unsur torsi tak nol senantiasa bebas linier. Akibatnya $(P, \subset)$ adalah himpunan terurut parsial. Misalkan $B$ adalah sebuah rantai di $P$, misalkan juga $G$ adalah gabungan semua subhimpuna dari $B$, akibatnya $G$ adalah batas atas dari $B$. Karena $B$ adalah suatu rantai, maka $G$ haruslah bebas linier.
Menurut Lema Zorn, $P$ punya elemen maksimal, namakan $Y$. Misalkan $Y = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ dengan $r < n$. Akibatnya $x_j$ adalah kombinasi linier dari $Y$ untuk semua $j > r$, karena jika tidak maka $Y \cup \{x_j\}$ bebas linier (yang mana kontradiksi dengan $Y$ sebagai unsur maksimal dari $P$). Akibatnya $Y$ merupakan pembangun $M$. Akibatnya $M$ adalah modul bebas. ■
Dan dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas ideal utama diberikan di bawah.
**Theorema 1.5.** Jika $M$ adalah modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama $R$, maka

$$M = M_{tor} \oplus M_{free}$$

Dimana $M_{free}$ adalah submodul bebas dari $M$ dan $M_{tor}$ adalah submodul torsi dari $M$.
**Bukti:**

Pandang epimorfisma natural $f$ dari $M$ ke $M/M_{tor}$, berdasarkan Theorem 1.3 dan Theorem 1.4, didapatkan $M/M_{tor}$ adalah suatu modul bebas. Misalkan $B' = \{b_1', b_2', \dots, b_n'\}$ basis dari for $M/M_{tor}$, dengan $b_i \in M$ sedemikian hingga $f(b_i) = b_i'$ untuk semua $i$. Jelas bahwa $Ker(f) = M_{tor}$.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ bebas linier. Apabila $k_1b_1 + k_2b_2 + \cdots + k_nb_n = 0_M$ akibatnya $k_1b_1' + k_2b_2' + \cdots + k_nb_n' = 0_{M/M_{tor}}$. Karena $B'$ adalah basis, maka $k_i = 0$ untuk semua $i$. Akibatnya $B$ bebas linier. Mudah dilihat bahwa $spanB$ adalah submodul bebas dari $M$, tulis $M_{free} = spanB$.

Misalkan $a \in M_{free} \cap Ker(f)$, maka $a = c_1b_1 + \cdots + c_nb_n$ dan $f(a) = 0$, akibatnya $c_1b_1' + \cdots + c_nb_n' = 0$. Jadi didapatkan $c_1 = \cdots = c_n = 0$, akibatnya diperoleh $M_{free} \cap Ker(f) = \{0\}$.

Misalkan $x \in M$, maka didapatkan $f(x) = m_1b_1' + \cdots + m_nb_n'$, sehingga $x - m_1b_1 - \cdots - m_nb_n \in Ker(f)$. Akibatnya didapatkan $x = y + m_1b_1 + \cdots + m_nb_n$ untuk $y \in Ker(f)$, dan $m_1b_1 + \cdots + m_nb_n$ di $M_{free}$. Jadi $M = M_{free} \oplus M_{tor}$.■

### 3.2 Dekomposisi Modul yang Dibangun Secara Hingga Atas Daerah Dedekind

Kedua, akan diberikan dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind. Definisi dasar diberikan di bawah ini

**Definisi 2.1.** Suatu modul $P$ atas ring $R$ dikatakan modul projektif jika untuk setiap epimorfisma $\alpha: M \to N$, dan homomorfism $\beta: P \to N$, terdapat suatu homomorfisma $\gamma: P \to A$ sedemikain hingga $\alpha\gamma = \beta$.

**Definisi 2.2**. Misal $D$ suatu daerah integral jika setiap ideal dari $D$ adalah modul projektif atas $D$, daerah integral $D$ dikatkan daerah Dedekind.

Apabila suatu ring adalah daerah ideal utama, setiap submodul bebas torsi haruslah modul bebas. Apabila ring suatu daerah Dedekind, yang merupakan bentuk lebih umum dari daerah ideal utama, didapatkan hasil yang sedikit berbeda.

**Teorema 2.1.** Setiap modul bebas adalah modul projektif.

**Proof:**

Misalkan $A$, $B$ suatu $R$-modul dan $P$ suatu $R$-modul bebas. Misalkan juga $\alpha: A \to B$ suatu epimorfisma sebarang. Jika $\beta: P \to B$ suatu homomorfisma, akan ditunjukkan terdapatsuatu homomorfisma $\gamma$ sedemikian hingga $\alpha\gamma = \beta$.

Misal $X$ suatu basis bai $P$, karena $\alpha$ suatu epimorfisma, maka $\forall x \in X, \exists a_x \in A$ sedemikian hingga $\alpha(a_x) = \beta(x)$. Akibatnya diperoleh suatu pemetaan $\varphi: X \to A$ sedemikian hingga $\varphi(xa) = a_x$. Untuk setiap $p \in P, p = \Sigma_{x\in X}\lambda_x x$ untuk $\lambda_x \in R$ yang tidak semuanya nol. Kemudian konstruksi suatu pengaitan $\gamma: P \to A$ sedemikian hingga $\gamma(\Sigma_{x\in X}\lambda_x xa) = \Sigma_{x\in X}\lambda_x\varphi(x)$. Jelas $\gamma$ suatu homomorphisma, lalu akan ditunjukkan bahwa $\alpha\gamma(p) = \alpha(\gamma(p))$. Sebelumnya diketahui $\alpha(\gamma(p)) = \alpha(\gamma(\Sigma_{x\in X}\lambda_x x)) = \alpha(\Sigma_{x\in X}\lambda_x\varphi(x)) = \alpha(\Sigma_{x\in X}\lambda_x a_x) = \Sigma_{x\in X}\alpha(\lambda_x a_x) = \Sigma_{x\in X}\lambda_x\alpha(a_x) = \Sigma_{x\in X}\lambda_x\beta(x) = \beta\Sigma_{x\in X}\lambda_x x$. Akibatnya terdapat homomorfisma $\gamma: P \to A$ sedemikian hingga $\alpha\gamma = \beta$. Jadi $P$ suatu modul projektif.■

**Teorema 2.2** Misalkan $\varphi: M \to P$ adalah pemetaan pada ke modul projektif $P$, maka terdapat suatu homomorphisma $\phi: P \to M$ sedemikian hingga $\varphi\phi$ adalah pemetaan identitas di $P$, dan $M = \phi(P) \oplus ker(\varphi)$.

**Proof:**

Misalkan $I: P \to P$ suatu pemetaan identitas. Karena $\varphi$ pada dan $P$ projectif, maka terdapat suatu homomorphisma $\alpha: P \to M$ sedemikian hingga $\varphi\alpha = I$ . Jika $x \in P$ dan $\alpha(x) = 0$, atau secara umum $\alpha(x) \in ker(\varphi)$, maka $0 = \varphi(\alpha(x)) = I(x) = x$. Akibatnya $\alpha$ satu-satu. Ini menunjukkan bahwajika $\alpha(x) \in \ker(\varphi)$ maka $x = 0$ dan $\alpha(x) = 0$, dengan perkataan lain $\alpha(P) \cap \ker(\varphi) = 0$.

Selanjutnya misalkan $m \in M$, maka didapatkan $\varphi\left(m - \alpha(\varphi(m))\right) = \varphi(m) - i(\varphi(m)) = 0$. Akibtanya $M = \alpha(\varphi(m)) + \left(m - \alpha(\varphi(m))\right) \in \alpha(P) + \ker(\varphi)$, sehingga didapatkan $M = \alpha(P) + \ker(\varphi)$. ■

Karena $P$ isomorf ke suatu submodul dari $M$, untuk kenyamanan, dikatakan $P$ sebagai suatu submodul dari $M$.

**Teorema 2.3.** Misal $M$ suatu $R$-modul. Maka terdapat $R$-modul bebas $F$ yang memiliki submodul $G$ sehingga $M \approx F/G$

**Bukti**:

Misalkan $\{a_\delta | \delta \in I\}$ adalah pembangun $M$. Pilih modul bebas $F$ dengan basis $\{b_\delta | \delta \in I\}$ .Akibatnya diperoleh suatu homomorfisma $\eta: F \to M$ dengan $\eta: \Sigma k_a b_a \to \Sigma k_a a_a$. Karena $\{a_a\}$ membangun $M$, maka $\eta$ pada. Menurut Teorema Isomorphism, diperoleh $M \approx F/G$, dimana $G = ker(\eta)$.■

Salah satu hasil penting adalah, setiap modul proyektif merupakan submodul dari modul bebas.

**Teorema 2.4.** Misal $M$ suatau modul atas ring $R$. Modul $M$ projektif jika dan hanya jika $M$ submodul dari suatu modul bebas.

**Bukti**:

Misal $F$ suatu modul bebas sedemikian hingga $F = M \oplus D$. Misal $\alpha: A \to B$ suatu epimorpisma dan $\beta: M \to B$ suatu homomorphisma. Jelas $\gamma: F \to B$ dengan $\gamma(f) = \gamma(m + d) = \beta(m)$ suatu homomorfisma karena $f = m + d$ unik dan $\beta$ suatu homomorfisma. Menurut Teorema 2.1, $F$ suatu modul projektif, akibatnya diperoleh suatu homomorfisma $\gamma': F \to A$ sedemikian hingga $\alpha\gamma' = \gamma$. Misalkan $\beta'$ suatu pembatasan dari $\gamma'$ di $M$, maka $\alpha\beta' = \beta$. Akibatnya $M$ suatu modul projectif.

Misal $M$ suatu modul projektif, misalkan juga $\{a_\delta | \delta \in I\}$ menjadi pembangunnya. Buat modul bebas $F$ dengan basis $\{b_\delta | \delta \in I\}$. Konstruksi suatu homomorphisma dari $F$ ke $M$ dimana memetakan $\sum k_a b_a$ ke $\sum k_a a_a$, jelas ini suatu homomorphisma yang pada karena $\{a_\delta | \delta \in I\}$ membangun $M$. Sehingga menurut Teorema 2.2, $M$ adalah submodul dari $F$. ■

**Teorema 2.5.** Misal $P$ suatu $R$-modul, maka pernyataan di bawah ini ekivalen

1. $P$ projektif
2. Setiap barisan eksak $0 \to M \to B \to P \to 0$ adalah suatu split.

**Bukti**:

Menurut Teorema 2.4 maka $P$ akanisomof ke suatu faktor modul dari modul bebas, namakan $F/G$, maka kita punya barisan eksak $0 \to G \to F \to P \to 0$. Berdasarkan asumsi, $0 \to G \to F \to P \to 0$ suatu split, jadi $P$ adalah suatu komponen dari hasil tambah langsung dari $F$, berdasarkan Teorema 2.3, maka $P$ suatu modul projektif.

Misalkan $P$ suatu modul projektif, dan $0 \to M \to B \to P \to 0$ suatu barisan eksak. Berdasarkan Teorema 2.2, maka barisan ini adalah suatu split. ■

Dari hasil sebelumnya, diketahui bahwa modul bebas torsi adalah modul bebas bila ring merupakan daerah ideal utama. Tetapi jika ring bukan daerah ideal utama, itu bukan jaminan, maka dekomposisi modul yang dibangun secara hingga tidak bisa sama. Berikutnya akan diberikan dekomposisi modul yang dihasilkan hingga jika ring adalah kasus yang lebih umum, yang merupakan domain Dedekind.

**Teorema 2.6.** Misalkan $M$ suatu modul yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind $D$, maka $M$ adalah modul projektif jika dan hanya jika $M$ bebas torsi.

**Bukti**:

Misalkan $M$ modul bebas torsi yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind $D$. Misalkan $K$ suatu lapangan hasil bagi dari $D$. Karena $M$ isomorf ke $M \otimes_D D$ maka terdapat suatu embedded dari $M$ ke $M \otimes_D D$.

Dan didapatkan $M \otimes_D K$ suatu $K$-modul, jelas $M \otimes_D K$ suatu ruang vektor, jadi $M \otimes_D K$ isomorf ke $\mathrm{K}^{\mathrm{r}}$ untuk suatu bilangan asli $\mathrm{r} \geq 0$. Misal $M$ dibangun oleh $u_1, u_2, \ldots, u_r$ dan $f$ adalah embendding dari $M$ ke $M \otimes_D K$. Misal $f(u_i) = u_i \otimes p_i / q_i$ dan $c = q_1 \ldots q_r$, maka $cM$ isomorf ke submodul $D^r$. Karena $M$ bebas torsi, dan $c$ tak nol, maka $M$ isomorf ke $cM$, jadi $M$ isomorf ke suatu submodul dari modul bebas. Sehingga menurut Teorema 2.4, $M$ adalah suatu modul projektif.

Sebaliknya misalkan $M$ suatu modul projektif. Berdasarkan Teorema 2.4 $M$ suatu submodul dari modul bebas, jadi $M$ adalah modul bebas torsi. ■

Dan sekarang kita dapat menyatakan hasil utama dari dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind

**Teorema 2.7.** Misal $M$ suatu modul yang dibangun secara hinggaatas daerah Dedekind $D$, maka $M = tM \oplus P$ dengan $P$ adalah modul projektif dari $M$ dan $tM$ adalah $M_{tor}$.

**Bukti**:

Misalkan $0 \to tM \to M \to M/tM \to 0$ suatu barisan eksak. Karena $M/tM$ bebas torsi, maka $M/tM$ projektif berdasarkan pada Teorema 2.6. Menurut Teorema 2.5, barisan ini split, jadi $tM$ adalah suatu komponen tambah langsung dari $M$. Akibatnya $M = tM \oplus P$ untuk suatu $P$, karena $P$ isomorf ke $M/tM$, maka $P$ bebas torsi, akibatnya $P$ suatu modul projektif. ■

## 4 Kesimpulan

Dekomposisi modul yang dihasilkan hingga tergantung pada skalar ring. Setiap kali ring berupa daerah ideal utama, modul selalu dapat diuraikan menjadi submodul bebas dan submodul torsi. Ketika ring lebih umum, modul dapat diuraikan menjadi submodul bebas dan submodul proyektif. Adalah normal untuk memiliki pertanyaan tentang penguraian modul setiap kali bentuk ring lebih umum, seperti ring Noetherian atau ring Artinian.

## 5 Daftar Pustaka

[1] M. S. Sauri, M. Hadijati, and N. Fitriyani, “Spline and Kernel Mixed Nonparametric Regression for Malnourished Children Model in West Nusa Tenggara,” *Jurnal Varian*, vol. 4, no. 2, pp. 99–108, Apr. 2021, doi: 10.30812/varian.v4i2.1003.

[2] M. Fahmi and N. Rosli, “Comparative study of Stochastic Taylor Methods and Derivative-Free Methods for Stochastic Differential Equations,” in *Journal of Physics: Conference Series*, Aug. 2021, vol. 1988, no. 1. doi: 10.1088/1742-6596/1988/1/012005.

[3] R. Utami, M. Hadijati, and I. G. A. W. Wardhana, “Intervention Model of IDX Finance Stock for the Period May 2010 - May 2020 Due to the Effects of the Corona Virus,” *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, vol. 1115, no. 1, p. 012057, 2021, doi: 10.1088/1757-899x/1115/1/012057.

[4] I. G. A. W. Wardhana, P. Astuti, and I. Muchtadi-Alamsyah, “On almost prime submodules of a module over a principal ideal domain,” *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, vol. 38, no. 2, pp. 121–128, Apr. 2016, doi: 10.17654/NT038020121.

[5] I. G. A. W. Wardhana and P. Astuti, “Karakteristik Submodul Prima Lemah dan Submodul Hampir Prima pada Z-Modul Zn,” *Jurnal Matematika & Sains*, vol. 19, no. 1, pp. 16–20, 2014.

[6] I. G. A. W. Wardhana, N. W. Switrayni, and Q. Aini, “Eigen Mathematics Journal Submodul Prima Lemah dan Submodul Hampir Prima Pada Z-modul M2(Zn),” *Eigen Mathematics Journal*, vol. 1, no. 1, pp. 28–30, 2018, Accessed: Dec. 20, 2021. [Online]. Available: https://doi.org/10.29303/emj.v1i1.6

[7] R. Juliana, I. G. W. W. Wardhana, and I. Irwansyah, “Some Characteristics of Prime Submodules of Gaussian Integer Modulo over Integer”.

[8] M. A. Misri, H. Garminia, P. Astuti, and Irawati, “A note on bézout modules,” *Far East Journal of Mathematical Sciences*, vol. 99, no. 11, pp. 1723–1732, 2016, Accessed: Dec. 20, 2021. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.17654/MS099111723

[9] M. Ali Misri, H. Y. Garminia, and J. By Pass Perjuangan Kesambi, “GENERALIZATION OF BÉZOUT MODULES,” 2013. [Online]. Available: http://pphmj.com/journals/fjms.htm

[10] G. Elfiyanti, I. Muchtadi-Alamsyah, F. Yuliawan, and D. Nasution, “On the category of weakly U-complexes,” *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 13, no. 2, pp. 323–345, 2020, doi: 10.29020/nybg.ejpam.v13i2.3673.

[11] N. Hijriati, S. Wahyuni, and I. E. Wijayanti, “Injectivity and Projectivity Properties of the Category of Representation Modules of Rings,” in *Journal of Physics: Conference Series*, Oct. 2018, vol. 1097, no. 1. doi: 10.1088/1742-6596/1097/1/012078.

[12] Fitriani, I. E. Wijayanti, B. Surodjo, S. Wahyuni, and A. Faisol, “Category of submodules of a uniserial module,” *Mathematics and Statistics*, vol. 9, no. 5, pp. 744–748, Sep. 2021, doi: 10.13189/ms.2021.090514.

[13] Irwansyah and D. Suprijanto, “Structure of linear codes over the ring Bk,” *Journal of Applied Mathematics and Computing*, vol. 58, no. 1–2, pp. 755–775, Oct. 2018, doi: 10.1007/s12190-018-1165-0.

[14] J. Kaewwangsakoon and S. Pianskool, “F-CS-RICKART MODULES,” *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, vol. 45, no. 1, pp. 29–54, Jan. 2020, doi: 10.17654/nt045010029.

[15] S. Sangwirotjanapat and S. Pianskool, "T-SMALL SUBMODULES WITH RESPECT TO AN ARBITRARY SUBMODULE," *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, vol. 40, no. 1, pp. 91–112, Mar. 2018, doi: 10.17654/nt040010091.

[16] Steven and Irawati, "ON CHARACTERIZATIONS OF PRIME AND ALMOST PRIME SUBMODULES," *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, vol. 40, no. 3, pp. 341–350, Jun. 2018, doi: 10.17654/nt040030341.

[17] I. G. A. W. Wardhana, N. D. H. Nghiem, N. W. Switrayni, and Q. Aini, "A note on almost prime submodule of CSM module over principal ideal domain," *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 2106, no. 1, p. 012011, Nov. 2021, doi: 10.1088/1742-6596/2106/1/012011.

[18] F. Maulana, I. G. A. W. Wardhana, and N. W. Switrayni, "Ekivalensi Ideal Hampir Prima dan Ideal Prima pada Bilangan Bulat Gauss," *EIGEN MATHEMATICS JOURNAL*, vol. 1, no. 1, p. 1, Jun. 2019, doi: 10.29303/emj.v1i1.29.

[19] W. U. Misuki, G. A. W. Wardhana, and N. W. Switrayni, "Some Characteristics of Prime Cyclic Ideal On Gaussian Integer Ring Modulo," 2021, doi: 10.1088/1757-899X/1115/1/012084.

[20] E. Kusniyanti, H. Garminia, and P. Astuti, "Dedekind domains and dedekind modules," *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, vol. 38, no. 3, pp. 249–260, Jun. 2016, doi: 10.17654/NT038030249.