

Analisis Sistem Antrian Pasien Rawat Jalan Menggunakan Distribusi Poisson dan Distribusi Erlang

Siti Masnikafah¹, Siti Alfiatur Rohmaniah², Mohammad Syaiful Pradana³

¹Universitas Islam Darul Ulum Lamongan, masnikafah@gmail.com

²Universitas Islam Darul Ulum Lamongan, sitialfiatur@unisda.ac.id

³Universitas Islam Darul Ulum Lamongan, syaifulp@unisda.ac.id

Abstract. Queue at the Health Center is the process of waiting for patients to receive services. The phenomenon of long and long queues occurs at the Turi Health Center Lamongan Regency especially during crowded conditions.. The purpose of this study was to determine the optimum number of waiters at the Turi Public Health Center in crowded conditions. Determination of the number of waiters based on the arrival rate represented by the Poisson Distribution, while the service time is represented by the Erlang Distribution. In this study there are three phases of service, namely registration, doctor services, and pharmacy services. In determining the optimal number of servers, look at the utility value. The results of the study on the crowded conditions of patients at the Turi Health Center occurred on Mondays with an arrival of 4 patients per minute and the rate of service for 10 minutes per patient. The average waiting time in the queue is 0.035 minutes, the average waiting time in the system is 0.04 minutes and the average number of patient in the queue and system is has no patients per minute. The utility value obtained is 0.4, so that the number of waiters in crowded conditions is one server.

Keywords: *Queue, service optimization, Poisson distribution, Erlang distribution.*

Abstrak. Antrian di Puskesmas merupakan proses menunggu pasien untuk mendapat pelayanan. Fenomena antrian yang panjang dan lama terjadi pada Puskesmas Turi Kabupaten Lamongan terlebih pada saat kondisi yang ramai. Tujuan penelitian ini untuk mengetahui jumlah pelayan optimum Puskesmas Turi dalam kondisi ramai pasien. Penentuan jumlah pelayan berdasarkan tingkat kedatangan yang terwakilkan dengan Distribusi Poisson, sedangkan waktu pelayanan diwakili oleh Distribusi Erlang. Pada penelitian ini terdapat tiga fase pelayanan yaitu pendaftaran, pelayanan dokter, dan pelayanan apotek. Dalam penentuan jumlah pelayan optimal melihat dari nilai utilitas. Hasil penelitian pada kondisi ramai pasien di Puskesmas Turi terjadi pada hari Senin dengan laju kedatangan 4 pasien per menit dan laju pelayanan selama 10 menit per pasien. Rata-rata waktu menunggu dalam antrian sebesar 0,035 menit, rata-rata waktu menunggu dalam sistem selama 0,04 menit dan rata-rata banyaknya pasien dalam antrian maupun sistem tidak ada pasien per menitnya. Nilai utilitas yang diperoleh sebesar 0,4, sehingga jumlah pelayan pada saat kondisi ramai pasien sudah sesuai sebanyak satu pelayan.

Kata Kunci: *Antrian, Optimasi Pelayanan, Distribusi Poisson, Distribusi Erlang.*

1 Latar Belakang

Fenomena menunggu merupakan akibat dari operasional pelayanan fasilitas yang acak dan tidak tersistem dengan baik, termasuk antrian yang terjadi di puskesmas atau rumah sakit. Secara umum jumlah kedatangan di puskesmas atau rumah sakit tidak diketahui setiap harinya, demikian pula lama pelayanan di loket pendaftaran, pelayanan dokter, pelayanan apotek dan lain-lain. Di Puskesmas Turi yang terletak di sebelah Jalan Raya Lamongan-Babat No.543 Tawangrejo, Wudi, Sukoanyar, Kecamatan Turi Kabupaten Lamongan Jawa Timur juga sering terlihat antrian cukup panjang saat kondisi ramai pasien. Hal ini dikarenakan pada loket pendaftaran hanya tersedia satu pelayan untuk melayani pasien yang berobat ke poli-poli yang ada.

Antrian yang lama dan panjang dapat merugikan bagi pasien maupun bagi pelayan, maka diperlukan penentuan jumlah pelayan yang sesuai dengan tingkat kedatangan dan waktu pelayanan. Distribusi kedatangan dapat diwakilkan dengan distribusi Poisson. Sedangkan waktu pelayanan dapat terwakilkan dengan distribusi Erlang. Distribusi Erlang sangat penting dalam teori antrian karena dengan distribusi erlang dapat diperoleh total waktu pelayanan yang dibutuhkan oleh pelanggan yang memungkinkan pelayan-pelayan memproses tidak hanya satu tugas yang spesifik melainkan barisan dari beberapa tugas.

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui implementasi distribusi Poisson dan distribusi Erlang dalam sebuah antrian dan mengetahui gambaran karakteristik dalam sistem antrian dengan waktu antarkedatangan berdistribusi Poisson dan waktu pelayanan berdistribusi Erlang. Hasil dari penelitian ini juga diharapkan dapat mengetahui jumlah pelayan optimal pada saat kondisi ramai pasien yang ada di Puskesmas Turi.

2 Metode Penelitian

2.1 Distribusi Poisson

Distribusi Poisson merupakan pengembangan distribusi binomial yang mampu mencari distribusi probabilitas dengan kemungkinan sukses sangat kecil dan jumlah eksperimen sangat besar [8]. Dalam teori antrian, semua proses kedatangan belum pasti mengikuti proses Poisson. Namun, distribusi Poisson sering muncul dalam beberapa kasus seperti, banyaknya pasien yang datang pada suatu rumah sakit, banyaknya pelanggan yang datang pada jasa pelayanan bank, banyaknya panggilan telepon selama jam kerja, banyaknya kecelakaan di perempatan jalan dan lain-lain [6]. Syarat-syarat kedatangan berdistribusi Poisson adalah sebagai berikut:

1. Pastikan bahwa proses kedatangan bersifat acak, jika hal ini terpenuhi maka kemungkinan besar pola kedatangan mengikuti distribusi Poisson.
2. Rata-rata jumlah kedatangan per interval waktu sudah diketahui dalam pengamatan sebelumnya.
3. Jika kita bagi interval waktu ke interval yang lebih kecil, maka pernyataan-pernyataan ini harus terpenuhi:
 - a. Probabilitas tepat satu kedatangan adalah sangat kecil dan konstan.

- b. Probabilitas dua kedatangan atau lebih selama interval waktu tersebut angkanya sangat kecil sekali, sehingga bisa dikatakan sama dengan nol.
- c. Jumlah kedatangan pada interval waktu tersebut tidak tergantung pada kedatangan di interval waktu sebelum dan sesudahnya.

Nilai laju kedatangan (λ) dalam distribusi poisson dapat diperoleh dengan:

$$\lambda = \frac{\text{jumlah pasien}}{\text{lama kerja}}. \quad (1)$$

Probabilitas tepat terjadinya x kedatangan dalam distribusi Poisson adalah:

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}. \quad (2)$$

dengan:

λ = Rata-rata jumlah terjadinya x per interval waktu.

x = Variabel acak diskrit yang menyatakan banyaknya kedatangan per interval waktu

2.2 Distribusi Erlang

Distribusi Erlang merupakan distribusi khusus dari distribusi Gamma dengan parameter $k = r$ dengan r bilangan bulat positif. Menggunakan distribusi erlang dapat diperoleh total waktu pelayanan yang dibutuhkan oleh pasien yang memungkinkan pelayan-pelayan tidak hanya satu tugas, melainkan barisan k tugas. Misalkan pada sebuah antrian pada saat $t = 0$ belum ada pembeli, kemudian pada t_1 ada pembeli datang. Pada t_2 pembeli kedua datang, dan seterusnya. Rentang dari $t = 0$ sampai pembeli pertama muncul dapat dikatakan sebagai waktu menunggu pembeli pertama. Lama menunggu sampai pembeli kedua datang dapat ditentukan dengan $t_1 + (t_2 - t_1)$. Secara rekursif dapat dicari waktu menunggu sampai pada pembeli ke- k . dengan k adalah peubah acak bebas dengan suatu distribusi Eksponensial yang identik [7].

Suatu peubah acak (T) berdistribusi Erlang jika memiliki fungsi kepekatan peluang sebagai berikut :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{(\mu k)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-k\mu t}, & \text{untuk } t \geq 0 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \quad (3)$$

dengan μ dan k adalah parameter bentuk [3]. Untuk mencari nilai laju pelayanan (μ) dapat menggunakan rumus :

$$\mu = \frac{\Sigma \text{waktu lama pelayanan}}{\text{jumlah nasabah yang di layani}}. \quad (4)$$

2.3 Model Antrian Pelayan Tunggal

2.3.1 Ukuran *Steady-State*

Keadaan sistem atau jumlah unit dalam sistem pada teori antrian akan dipengaruhi oleh *state* (keadaan) awal dan waktu yang telah dilalui jika suatu sistem mulai berjalan. Kondisi *Steady-state* merupakan keadaan dimana suatu sistem berada dalam kesetimbangan [2]. Ukuran *steady state* sistem antrian disimbolkan dengan ρ (faktor utilitas) yaitu:

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} \quad (5)$$

dengan:

λ = Laju waktu kedatangan

μ = Laju waktu pelayanan

c = Jumlah pelayan.

Keadaan *steady-state* dapat terpenuhi apabila $\rho < 1$ yang berarti bahwa $\lambda < \mu$. Sedangkan jika $\rho > 1$ maka kedatangan terjadi dengan kelajuan yang lebih cepat daripada yang dapat ditampung oleh pelayan, keadaan yang sama berlaku apabila $\rho = 1$.

2.3.2 Ukuran Kinerja dengan Waktu Pelayanan Berdistribusi Erlang dengan Pelayan Tunggal

Jika λ merupakan rata-rata laju kedatangan, μ merupakan laju pelayanan, dan k merupakan banyaknya fase, maka ukuran-ukuran kinerja dengan waktu pelayanan distribusi Erlang sebagai berikut :

1. Rata-rata waktu menunggu dalam antrian (W_q)

$$W_q = \frac{\lambda(k+1)}{2k\mu(\mu-\lambda)} \quad (6)$$

2. Rata-rata banyaknya pasien dalam antrian (L_q)

$$L_q = \frac{\lambda^2(k+1)}{2k\mu(\mu-\lambda)} \quad (7)$$

3. Rata-rata waktu menunggu dalam sistem (W_s)

$$W_s = \frac{\lambda(k+1) + (2(\mu-\lambda))}{2k\mu(\mu-\lambda)} \quad (8)$$

4. Rata-rata banyaknya pasien dalam sistem (L_s)

$$L_s = \frac{\lambda^2(1+k) + 2\lambda(\mu-\lambda)}{2k\mu(\mu-\lambda)} \quad (9)$$

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Data

Penelitian dilaksanakan pada hari senin sampai sabtu, tanggal 22-27 Maret 2021 mulai pukul 07.30 WIB - 12.00 WIB dengan cara mencatat secara langsung waktu pasien mulai dan selesai dilayani di loket pendaftaran, ruang dokter dan apotek Puskesmas Turi, yang terletak di sebelah Jalan Raya Lamongan-Babat No.543 Tawangrejo, Wudi, Sukoanyar, Kecamatan Turi, Kabupaten Lamongan.

Tabel 1. Data Kedatangan Pasien Rawat Jalan Puskesmas Turi.

Hari	Jumlah pasien	Waktu Minimum	Waktu Maksimum	Mean	Standar Deviasi
Senin	80	1	13	3.0750	2.57434
Selasa	77	0	20	2.8571	3.73008
Rabu	56	0	19	4.3393	4.70696
Kamis	60	0	13	3.5167	3.48601
Jum'at	40	0	28	5.5000	6.39311
Sabtu	57	0	13	3.9123	3.51162

3.2 Distribusi Waktu Kedatangan Pasien

Dilakukan uji distribusi Poisson untuk waktu kedatangan pasien:

1. Hipotesis:
 H_0 : Data tidak berdistribusi poisson
 H_1 : Data berdistribusi poisson
2. Tingkat signifikansi (α) = 0,05
3. Statistik uji

Tabel 2. Nilai *P-value* Uji Distribusi Poisson.

Hari	<i>P-value</i>	N
Senin	0,008	80
Selasa	0,000	77
Rabu	0,000	56
Kamis	0,000	60
Jum'at	0,000	40
Sabtu	0,001	57

4. Kriteria pengambilan keputusan
 H_0 ditolak jika nilai *P-value* < α
5. Kesimpulan
 Berdasarkan tabel pada statistik uji, nilai *P-value* hari senin sampai hari sabtu bernilai kurang dari nilai tingkat signifikan (α) yang berarti H_0 ditolak dan H_1 diterima. Jadi, data antarkedatangan pada hari senin sampai hari sabtu mengikuti distribusi Poisson.

3.3 Distribusi Waktu Pelayanan Pasien

Dilakukan uji distribusi Eksponensial untuk waktu pelayanan pasien:

1. Hipotesis:
 H_0 : Data tidak berdistribusi eksponensial
 H_1 : Data berdistribusi eksponensial
2. Tingkat signifikansi (α) = 0,05
3. Statistik uji

Tabel 3. Nilai *P-value* Uji Distribusi Eksponensial

Hari	<i>P-value</i>	k_1	k_2	k_3
Senin	0,000	1	7	2
Selasa	0,000	2	8	3
Rabu	0,000	2	10	2
Kamis	0,000	2	9	2
Jum'at	0,000	3	9	2
Sabtu	0,000	3	9	2

4. Kriteria pengambilan keputusan
 H_0 ditolak jika nilai *P-value* < α
5. Kesimpulan
 Berdasarkan tabel pada statistik uji, nilai *P-value* hari senin sampai hari sabtu bernilai kurang dari nilai tingkat signifikan (α) yang berarti H_0 ditolak dan H_1 diterima. Jadi, data waktu pelayanan pada hari senin sampai hari sabtu berdistribusi Eksponensial.

3.4 Menentukan Nilai Laju Kedatangan

Nilai dari laju kedatangan pasien (λ) dengan jam kerja setiap harinya 4,5 jam adalah sebagai berikut:

Tabel 4. Nilai Laju Kedatangan

Hari	Jumlah pasien	Laju Kedatangan (Pasien/Jam)	Laju Kedatangan (Pasien/Menit)
Senin	80	17,778	4
Selasa	77	17,111	4
Rabu	56	12,444	5
Kamis	60	13,333	5
Jum'at	40	8,889	7
Sabtu	57	12,667	5

3.5 Menentukan Nilai Laju Pelayanan

Laju pelayanan adalah rata-rata pasien yang telah mendapatkan pelayanan per satuan waktu. Nilai laju pelayanan (μ) sebagai berikut:

Tabel 5. Nilai Laju Pelayanan

Hari	Pendaftaran	Ruang dokter	Apotek	Nilai Laju Pelayanan
Senin	1	7	2	10
Selasa	2	8	3	13
Rabu	2	10	2	14
Kamis	2	9	2	13
Jum'at	3	9	2	14
Sabtu	3	9	2	14

3.6 Menentukan Kondisi *Steady-State*

Ukuran *Steady-state* dari kinerja sistem pelayanan dapat dilihat dari nilai utilitas yang diperoleh dari data laju kedatangan dan laju pelayanan.

Tabel 6. Nilai Utilitas

Hari	C	λ	μ	$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu}$
Senin	1	4	10	0,4
Selasa	1	4	13	0,3
Rabu	1	5	14	0,35
Kamis	1	5	13	0,38
Jum'at	1	7	14	0,5
Sabtu	1	5	14	0,35

Nilai utilitas hari senin sampai sabtu kurang dari satu, sehingga dapat diartikan bahwa rata-rata kedatangan pasien hari senin sampai sabtu tidak melebihi kapasitas pelayanan. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa antrian dalam kondisi *Steady-state*. Hal ini berarti sistem pelayanan sudah seimbang dengan tingkat kedatangan sehingga tidak perlu adanya penambahan pelayan.

3.7 Ukuran-Ukuran Kinerja dengan Waktu Kedatangan Berdistribusi Poisson dan Waktu Pelayanan Berdistribusi Erlang

Gambaran karakteristik dalam sistem antrian meliputi ukuran-ukuran kinerja dengan waktu pelayanan berdistribusi Erlang sebagai berikut:

1. Nilai rata-rata waktu menunggu dalam antrian (W_q)

Tabel 6. Nilai Rata-Rata Waktu Menunggu dalam Antrian

Hari	W_q (pasien)
Senin	0,035
Selasa	0,017
Rabu	0,02
Kamis	0,02
Jum'at	0,03
Sabtu	0,02

Rata-rata waktu menunggu dalam antrian paling lama terjadi pada hari senin sebesar 0,035 menit.

2. Nilai rata-rata banyaknya pasien dalam antrian (L_q)

Tabel 7. Nilai Rata-Rata Banyaknya Pasien dalam Antrian

Hari	L_q (menit)
Senin	0,14
Selasa	0,06
Rabu	0,10
Kamis	0,12
Jum'at	0,25
Sabtu	0,09

Banyaknya pasien dalam antrian hari senin sampai hari sabtu bernilai kurang dari satu sehingga dapat disimpulkan hari senin sampai hari sabtu tidak ada pasien dalam antrian per menitnya.

3. Nilai rata-rata waktu menunggu dalam sistem (W_s)

Tabel 8. Nilai Rata-Rata Waktu Menunggu dalam Sistem

Hari	W_s (pasien)
Senin	0,04
Selasa	0,01
Rabu	0,02
Kamis	0,02
Jum'at	0,03
Sabtu	0,02

Rata-rata waktu menunggu dalam sistem paling lama terjadi pada hari senin yaitu 0,04 menit, sedangkan paling cepat yaitu hari selasa sebesar 0,01 menit.

4. Nilai rata-rata banyaknya pasien dalam sistem (L_s)

Tabel 9. Nilai Rata-Rata Banyaknya Pasien dalam Sistem

Hari	L_s (menit)
Senin	0,17
Selasa	0,07
Rabu	0,11
Kamis	0,13
Jum'at	0,26
Sabtu	0,10

Nilai rata-rata banyaknya pasien dalam sistem hari senin sampai sabtu kurang dari satu, yang berarti tidak ada pasien dalam sistem per menitnya.

4 Simpulan

Kedatangan pada Puskesmas Turi diasumsikan berdistribusi Poisson dengan laju kedatangan (λ) hari senin sebesar 4 pasien/menit, sedangkan waktu pelayanan berdistribusi Erlang dan diperoleh total laju pelayanan pada hari senin sebesar 10 menit/pasien. Dalam menentukan jumlah pelayan yang optimal perlu adanya gambaran karakteristik sebuah antrian yaitu berupa ukuran-ukuran kinerja. Ukuran kinerja diperoleh hari yang paling ramai pasien yaitu hari senin dengan jumlah pasien sebanyak 80 pasien, waktu antarkedatangan 4 menit dan laju pelayanan 10 menit/pasien. Pada hari senin $W_q = 0,035$ menit, $L_q = 0$ pasien, $W_s = 0,04$ menit dan $L_s = 0$ pasien. Sistem antrian di puskesmas Turi saat kondisi ramai pasien sudah optimal karena memiliki nilai utilitas kurang dari 1 yaitu 0,4 sehingga tidak perlu penambahan pelayan.

5 Daftar Pustaka

- [1] Aminudin. *Prinsip-Prinsip Riset Operasi*, Jakarta, Erlangga, 2005.
- [2] Dimiyati, T.T., dan Dimiyati A, *Operation Research Model-Model Pengambilan Keputusan*. Bandung, Sinar Baru Algensindo, 1994.
- [3] Hiller, Frederick., dan Gerald J. Lieberman, *Introduction to Operations Research: Penelitian Operasional*, Buku I-8/E. Yogyakarta: Andi, 2008.
- [4] Kakiay, Thomas J, *Dasar Teori Antrian untuk Kehidupan Nyata*, Yogyakarta, Andi, 2004.
- [5] Kurniasih, Rini dan Getut P, *Distribusi Erlang dan Penerapannya*. Semarang, FKIP Universitas Negeri Semarang, 2013.
- [6] Mulyono, S, *Riset Operasi*, Jakarta, Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia, 2004.
- [7] Rizal, M. Taufik, *Analisis Teori Antrian Multi-Server dengan Distribusi Erlang*. Bandar Lampung, FMIPA Universitas Lampung, 2018.
- [8] Supranto, J, *Pengukuran Tingkat Kepuasan Pelanggan untuk Menaikan Pangsa Pasar*, Jakarta, Rineka Cipta, 2001
- [9] Walpole, R.E dan Myers R.H, *Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuan, Edisi Ke-4*, Bandung, Insitut Teknologi Bandung, 1995.