Jurnal UJMC, Volume 7, Nomor 2, Hal. 09 - 18
pISSN : 2460-3333 eISSN : 2579-907X

Sebuah Karakteristik dari Modul Uniserial dan Gelanggang Uniserial

I Gede Adhitya Wisnu Wardhana[1], Fariz Maulana[2]
[1]Universitas Mataram, Jl. Majapahit no.62, Mataram, NTB, adhitya.wardhana@unram.ac.id
[2]Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesa 10, 20120008@mahasiswa.itb.ac.id

Abstract. The module is a generalization of the vector space. The module that will be discussed is a uniserial module, which is a module that only has one composition series. A uniserial ring is a ring whose module over itself is uniserial. The uniserial ring is an Artin and local ring, but the converse is not necessarily true. In this paper, we will discuss Artin and local ring with additional properties so that it is characteristics of the uniserial ring.

Keywords: *uniserial module, Artinian ring, uniserial ring.*

Abstrak. Modul merupakan perumuman dari ruang vektor. Modul yang akan dibahas adalah modul uniserial yakni modul yang hanya memiliki satu deret komposisi. Gelanggang uniserial merupakan gelanggang yang modul atas dirinya sendiri merupakan modul uniserial. Gelanggang uniserial merupakan gelanggang Artin dan local, tapi belum tentu sebaliknya. Dalam paper ini akan dibahas sifat tambahan dari gelanggang Artin dan lokal sehingga menjadi karakteristik dari gelanggang uniserial.

Kata Kunci: *modul uniserial, gelanggang Artin, gelanggang uniserial*.

1. Pendahuluan

Karakterisasai suatu modul, selain tergantung dari tipe modulnya, juga sangat tergantung dari skalarnya. Skalar modul berupa skalar bilangan bulat Gauss [4][6], skalar daerah ideal utama [7][8], hingga skalar daerah valuasi tunggal [1]. Pada perkembangan riset aljabar, secara umum karakteristik pada teori gelanggang yang sudah ada dibawa ke teori modul [3][5]. Contohnya Garminia dkk memberikan karakteristik modul Dedekind yang dibawa dari karakteristik gelanggang Dedekind [2]. Pada artikel ini akan dibahas suatu modul yang dinamkan modul uniserial, yakni modul yang mempunyai deret komposisi yang unik [9], kemudian definisi ini dibawa ke teori gelanggang untuk mendefinisikan gelanggang uniserial.

Beberapa terminologi pada modul yang digunakan pada artikel ini diberikan sebagai berikut

Definisi 1.1.
Misalkan M suatu A-modul, himpunan tak hampa $N \subset M$ dikatakan submodul maksimal dari M jika ada submodul L sedemikian hingga $N \subset L \subset M$, maka berlaku $L = N$ atau $L = M$.

Definisi 1.2.
Misalkan M suatu A-modul, himpunan tak hampa $N \subset M$ dikatakan submodul *superfluous* dari M jika untuk sebarang submodul $X \subset M$ sedemikian hingga $N + X = M$, maka berlaku $X = M$.

Jika N adalah submodul *superfluous* dari M, maka kita notasikan dengan $N \subset_S M$. Pada modul bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_{36}$ atas gelanggang $\mathbb{Z}$, submodul $\{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33\}$ adalah submodul maksimal, dan $\{0,18\}$ adalah submodul *superfluous*.

Definisi 1.3.
Misalkan M suatu A-modul, submodul N dikatakan submodul minimal dari M apabila N tidak memuat submodul tak nol dari M.

Definisi 1.4.
Misalkan M suatu A-modul, tulis $\Delta = \{N | N \text{ submodul } M\}$. Untuk Ψ subkoleksi tak hampa dari Δ, unsur $X \in \Psi$ dikatkan unsur minimal apabila X tak memuat anggota lain dari Ψ.

2. Modul Uniserial dan Gelanggang Uniserial

2.1. Modul Uniserial

Modul uniserial adalah modul khusus dari modul Artin yang didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.1.
Misalkan M suatu R-modul, modul M dikatakan modul Artin bila memenuhi *kondisi minimum*, yakni setiap koleksi tak hampa dari submodul-submodul M mempunyai anggota terkecil

Definisi 2.2.
Misalkan M suatu R-modul, rantai submodul

$$\{0\} = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_k = M$$

dikatakan *barisan* M, dan *faktor* dari barisan M adalah modul faktor M_{i+1}/M_i, dengan $i = 0,1,2,\ldots k-1$.

Dua barisan yang jumlah faktornya sama dikatakan ekivalen jika punya faktor yang isomorf . Sebagai contoh, modul $\mathbb{Z}_{36}$ atas dirinya sendiri mempunyai barisan yang ekivalen, yakni barisan $\langle 0 \rangle \subset \langle 18 \rangle \subset \langle 6 \rangle \subset \mathbb{Z}_{36}$ dan barisan $\langle 0 \rangle \subset \langle 18 \rangle \subset \langle 9 \rangle \subset \mathbb{Z}_{36}$.

Melihat contoh di atas, maka barisan $\mathbb{Z}_{36}$ yang pertama masih dapat diperpanjang dengan menyisipkan $\langle 3 \rangle$ diantara $\langle 6 \rangle$ dan $\mathbb{Z}_{36}$. Proses ini dinamakan dengan *perhalusan barisan*.

Definisi 2.3.
Misalkan M suatu R-modul, barisan submodul M

$$\{0\} = N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots \subseteq N_n = M$$

dikatakan perhalusan barisan

$$\{0\} = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_k = M$$

Apabila N_j memuat M_i untuk setiap $i \leq j$.

Pada modul $\mathbb{Z}_{36}$, barisan $\langle 0 \rangle \subset \langle 18 \rangle \subset \langle 6 \rangle \subset \langle 3 \rangle \subset \mathbb{Z}_{36}$ tidak dapat diperhalus lagi, barisan seperti ini yang dinamakan dengan deret komposisi.

Definisi 2.4.
Misalkan M suatu R-modul barisan submodul M

$$\{0\} = N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots \subseteq N_n = M$$

dikatakan deret komposisi apabila barisan tidak dapat diperhalus lagi.

Definisi 2.5.
Misalkan M suatu R-modul, modul M dikatakan modul sederhana jika submodul dari M adalah $\{0\}$ dan dirinya sendiri.

Teorema 2.1.
Misal M suatu R-modul, dan N, K adalah dua submodul berbeda dari M dengan $K \subset N$. Faktor N/K adalah modul sederhana jika dan hanya jika untuk setiap submodul L dari M dengan $K \subseteq L \subseteq N$ berakibat $L = N$ atau $L = K$.
Bukti:
Misalkan N/K modul sedehana. Andaikan ada A submodul M sehingga $K \subseteq A \subseteq N$ sehingga $A \neq N$ dan $A \neq K$. Jadi kita bisa buat modul baru A/K dengan $A/K \subset N/K$ dimana A/K bukan submodul trivial karena $A \neq M$ dan $A \neq N$ (kontradiksi dengan N/M sederhana).

Sebaliknya jika untuk setiap A submodul M dengan $K \subseteq A \subseteq N$ maka $A = K$ atau $A = N$. Andaikan N/K tidak sederhana, yakni terdapat submodul B sehingga B/M submodul tak trivial N/K, akibatnya $K \subseteq B \subseteq N$. Karena $B/M \neq \{0\}$ maka $B \neq M$, dan karena $B/K \neq N/K$ maka $B \neq N$ (kontradiksi). Jadi haruslah N/K sederhana.■

Teorema 2.2.
Misal M, N suatu R-modul dan f suatu homomorfisma dari M ke N, maka

(1) Jika X submodul dari M maka $f(X)$ adalah submodul dari N
(2) Jika f suatu isomorfisma dan M sederhana, maka N sederhana.

Bukti:

(1) Misalkan X submodul M. Jelas f(X) subhimpunan tak hampa dari N karena 0 di $f(X)$. Ambil $a, b \in f(X)$ sebarang dan k di A sebarang maka ada a' dan b' di X sehingga $f(a') = a$ dan $f(b') = b$, karena X submodul dan f homomorfisma maka $a' + b'$ dan ka' di X akibatnya $f(a' + b') = f(a') + f(b') = a + b$ dan $f(ka') = kf(a')$ ada di $f(X)$. Jadi $f(X)$ submodul di N.
(2) Misalkan M sederhana dan N isomorf dengan M. Misalkan X submodul N, jika $X = \{0\}$, maka $f(X) = \{0\}$, misalkan $X \neq 0$, maka ada $x \neq 0$ di X. Karena f isomorfisma maka $f(x) \neq 0$, jadi $f(X) \neq 0$, dan karena M

sederhana maka $f(X) = M$. Tapi karena g pada maka diperoleh $f(N) = M = g(X)$, jadi $N = X$. Jadi N modul sederhana.

Teorema 2.3.
Misal R suatu R-modul dan J adalah ideal maksimal dari R, maka untuk setiap $x \epsilon R$ taknol berlaku Jx adalah submodul maksimal Rx.
Bukti:
Jelas Jx adalah submodul sejati dari Rx. Buat pengaitan $\Psi: R/J \rightarrow Rx/Jx$ dengan $r + J \rightarrow rx/Jx$. Misalkan $r_1 + J, r_2 + J$ di R/J, apabila $r_1 + J = r_2 + J$ maka $r_1 - r_2$ ada di J, jelas $(r_1 - r_2)x$ ada di Jx akibatnya $r_1x + J = r_2x + J$, jadi Ψ terdefinisi dengan baik. Lebih lanjut $\Psi((r_1 + J) + (r_2 + J)) = \Psi((r_1 + r_2) + J) = (r_1 + r_2)x + Jx = (r_1\, x + Jx) + (r_2x + Jx) = \Psi(r_1 + J) + \Psi(r_2 + J)$. Jadi Ψ suatu homomorfisma.
Jika $r'x + Jx$ di Rx/Jx sebarang, pilih $r + J$ di R/J maka $\Psi(r + J) = r'x + Jx$, jadi Ψ suatu epimorfisma. Ambil $r'' + J$ di $Inti\{\Psi\}$ sebarang, maka $\Psi(r" + J) = r''x + Jx = 0 + Jx$, akibatnya r'' di J, maka $r'' + J = 0 + J$. Jadi $Inti\{\Psi\} = \{0 + J\}$. Jadi Ψ suatu isomorfisma, karena R/J sederhana maka Rx/Jx sederhana. Akibatnya Jx submodul maksimal dari Rx.

Sekarang akan mendefinisikan kembali deret komposisi pada Definisi 2.4 menggunkan tiga teorema yang didapatkan.

Definisi 2.6.
Misalkan M suatu R-modul barisan submodul M

$$\{0\} = N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots \subseteq N_n = M$$

dikatakan deret komposisi bila N_{i+1}/N_i adalah modul sederhana untuk setiap $i = 1,2, \dots, n - 1$.

Panjangnya deret komposisi adalah k, yaitu banyaknya faktor. Dua deret komposisi dikatakan ekivalen jika setiap faktor dari kedua baris ismorf dan punya panjangnya yang sama. Perlu diperhatikan bahwa tidak semua modul memiliki deret komposisi, contohnya modul $\mathbb{Z}$ atas $\mathbb{Z}$. Deret komposisi dari suatu modul senantiasa ekivalen, untuk membuktikan itu dibutuhkan sifat berikut

Teorema 2.4. (Lema Schreier-Zassenhaus)
Misal V suatu R-modul. Dua barisan modul V mempunyai perhalusan yang sama.

Secara tak langsung bisa dilihat dari Lema Schreier-Zassenhaus bahwa penghalusan kedua barisan, punya faktor-faktor yang isomorf. Berdasarkan Lema Schreier-Zassenhaus dan Teorema 2.2 bisa dibuktikan bahwa deret komposisi dari suatu modul pasti ekivalen.

Teorema 2.5. (Teorema Jordan-Holder)
Sebarang dua deret komposisi dari R-modul M ekivalen, yakni punya panjang yang sama dan faktor isomorf. Lebih jauh lagi, jika M punya deret komposisi maka setiap barisan dari M dapat diperhalus menjadi deret komposisi.

Dari fakta-fakta yang diperoleh, maka dapat didefinisikan suatu modul yang erat kaitannya dengan deret komposisi.

Definisi 2.8.
Misalkan M suatu R-modul, M dikatakan modul uniserial apabila memiliki deret komposisi yang tunggal.

2.2. Gelanggang Uniserial

Objek pada teori modul secara umum didefinisikan dari terminologi pada teori gelanggang. Pada artikel ini akan dilakukan sebaliknya, dengan mendefinisikan gelanggang uniserial dari modul uniserial.

Definisi 2.7.
Misal R gelanggang komutatif maka radikal Jacobson didefinisikan sebagai $J(R) = \{r \in R | Vr = \{0\}$ untuk setiap V modul sederhana atas $R\}$

Sebagai contoh, gelanggang $\mathbb{Z}_{36}$ punya $J(R)$ $\{0, 6, (12), (18,), (24), (30)\}$. Secara operasional, menentukan radikal Jacobson dari suatu gelanggang menggunakan Definisi 2.7 tidak praktis. Teorema berikut membantu proses pencarian radical Jacobson lebih mudah.

Teorema 2.6.
Jika R gelanggang komutatif, maka $J(R)$ adalah irisan semua ideal maksimal dari R.
Bukti:
Misal M ideal maksimal dari R sebarang maka R/M sederhana, jadi $0 + M = (1 + M)j = j + M$ untuk setiap $j \in J(R)$. Akibatnya $j \in M$ untuk setiap $j \in J(R)$, ini mengakibatkan $J(R) \subseteq J$, dengan J adalah irisan semua ideal maksimal dari R.

Sebaliknya misal M sebarang modul sederhana dari R, jadi berlaku $M = Rm$, untuk sebarang m yang tak nol di M. Sekarang buat pemetaan $\Phi: R \to M$ dengan r dipetakan ke rm. Jika $r_1 = r_2$ maka jelas $r_1 m = r_2 m$, jadi Φ terdefinisi dengan baik.

Untuk sebarang r_1, r_2 di R, $\Phi(r_1 + r_2) = (r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m = \Phi(r_1) + \Phi(r_2)$ jadi Φ suatu homorfisma. Jika n di M maka $n = r'm$ untuk suatu r' di R, jadi $\Phi(r') = r'm = n$, jadi Φ suatu epimorfisma.

$Inti\ (\Phi)$ adalah ideal dari R, misal I ideal R sehingga $Inti\ \{\Phi\} \subset I$. Karena M sederhana maka $\Phi(I) = M$. Dilain pihak Φ suatu epimorfisma, jadi $\Phi(R) = M$, akibatnya $R = I$. Jadi $Inti\{\Phi\}$ adalah ideal maksimal dari R. Jadi $J \subseteq Inti\{\Phi\}$. Karena M dan m diambil sebarang dan $jm = 0$ untuk setiap $j \in J$ dan $m \in M$ maka $J \subseteq J(R)$. Jadi $J(R)$ adalah irisan semuah ideal maksimal dari R.■

Radikal Jacobson mempunyai sifat lain yaitu $MJ(R)$ adalah superfluous untuk M suatu modul atas R yang dibangun oleh berhingga unsur. Untuk menunjukan sifat ini akan digunakan sifat berikut.

Teorema 2.7. (Lema Nakayama)
Misal V adalah modul atas gelanggang R yang dibangun oleh berhingga unsur dan M submodul dari V.

(1) Jika M submodul sejati V, maka terdapat submodul maksimal A dan $M \subseteq A \subseteq V$.
(2) Jika $J = Rad(R)$ dan $V = M + VJ$, maka $V = M$.

Berdasarkan lema Nakayama, akan dibuktikan sifat radikal Jacobson

Teorema 2.8.
Misal R gelanggang dan $J = J(R)$. Maka untuk setiap M modul atas R yang dibangun oleh berhingga unsur berlaku $MJ \subset_S M$.
Bukti:
Misal M sebarang R-modul, maka MJ suatu submodul dari M. Ambil submodul di M sebarang, misal N, sehingga $MJ + N = M$. Menurut Lema Nakayama $N = M$. Jadi $MJ \subset_S M$. ■

Jika sebelumnya telah diberikan istilah modul Artin dan modul uniserial, pada bagian ini diberikan istilah gelanggang Artin dan gelanggang uniserial.

Definisi 2.9.
Misalkan R gelanggang komutatif, R dikatakan gelanggang Artin jika R-modul R adalah modul Artin.

Definisi 2.10.
Misalkan R gelangggang komutatif, R dikatakan gelanggang uniserial jika modul R atas dirinya sendiri adalah modul uniserial.

Definisi 2.11.
Misalkan R gelanggang komutatif, R dikatakan gelanggang lokal jika R hanya memiliki satu ideal maksimal.

Definisi 2.12.
Misalkan R gelanggang komutatif, R dikatakan gelanggang ideal utama jika semuah idealnya dibangun oleh satu unsur.

Mudah dilihat apabila R gelanggang uniserial, maka R juga adalah gelanggang Artin dan gelanggang lokal. Hal ini akan kita bahas pada sifat berikut.

Teorema 2.9.
Misal R gelanggang komutatif. Jika R gelanggang uniserial, maka R gelanggang Artin sekaligus gelanggang lokal.
Bukti:
Misal R gelanggang uniserial, maka modul R atas dirinya sendiri punya deret komposisi secara tunggal, yakni $\{0\} = R_0 \subseteq R_1 \subseteq \cdots \subseteq R_{n-1} \subseteq R_n = R$. Jelas R tidak memiliki submodul yang lain.

Misalkan gelanggang R punya dua ideal maksimal yaitu A dan B. Karena R_i juga merupakan ideal gelanggang R maka submodul maksimal R_{n-1} merupakan salah satu dari A atau B. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $R_{n-1} = A$. Tapi B juga submodul maksimal dari R, karena R tidak punya submodul lain maka $A = B$. Jadi R gelanggang lokal.

Misal Φ sebarang koleksi tak hampa dari submodul-submodul R, jelas Φ anggotanya hingga (paling banyak $n+1$). Karena anggota Φ adalah elemen-elemen dari deret komposisi diatas maka Φ punya anggota minimal. Jadi R gelanggang Artin.■

Apabila R suatu gelanggang Artin, maka R belum tentu gelanggang uniserial, contohnya $\mathbb{Z}_6$ dengan dua deret komposisi $\mathbb{Z}_6 \supset \langle 2\rangle \supset \langle 0\rangle$ dan $\mathbb{Z}_6 \supset \langle 3\rangle \supset \langle 0\rangle$. Demikian juga apabila R suatu gelanggang lokal, R belum tentu gelanggang uniserial, contohnya $R = \left\{\left(\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R}\right)\right\}$.

Sebelum dibahas karakterisasi gelanggang uniserial, akan ditunjukan suatu kondisi gelanggang merupakan gelanggang uniserial tanpa melibatkan ketunggalan deret komposisi.

Teorema 2.10.
Misalkan R gelanggang Artin dan lokal dengan ideal maksimal J. Gelanggang R uniserial jika dan hanya jika $O \subseteq J^n \subseteq \cdots ... \subseteq J \subseteq R$ suatu deret komposisi dari modul R atas R.
Bukti:
Misal R gelanggang uniserial, jadi modul R atas dirinya punya deret komposisi, $\{0\} \subset R_n \subset \cdots \subset R_2 \subset J \subset R$. Misal $a \in J$ dan $a \notin R_2$, jelas $a \neq 0$. Karena R uniserial maka $aR = J$, menurut Teorema 2.9 diperoleh aJ submodul maksimal dari J, jadi $R_2 = a^2R = J^2$. Dengan cara sama diperoleh $R_k = J^k$ untuk $k = 3, \ldots, n$. Jadi $O \subseteq J^n \subseteq \cdots ... \subseteq J \subseteq R$ suatu deret komposisi.

Sebaliknya misal $O \subseteq J^n \subseteq \cdots ... \subseteq J \subseteq R$ suatu deret komposisi dari R-modul R. Misal $O \subseteq R_n \subseteq \cdots ... \subseteq R_2 \subseteq J \subseteq R$ suatu deret komposisi yang lain, andaikan $R_2 \neq J^2$, didapatkan $R_2 + J^2$ submodul terkecil yang memuat R_2 dan J^2, maka $R_2 + J^2 = J$. Menurut Lema Nakayama $R_2 = J$ (kontradiksi), jadi haruslah $R_2 = J^2$. Dengan cara sama dapat diperoleh $R_k = J^k$, akibatnya deret komposisinya tunggal. Jadi R gelanggang uniserial.■

Teorema 2.11.
Misalkan R gelanggang komutatif, maka ketiga peryataan berikut ekivalen
(1) Gelanggang R uniserial
(2) Gelanggang R Artin, lokal, gelanggang ideal utama
(3) Gelanggang R Artin, lokal dan memiliki radikal Jacobson yang dibangun oleh satu unsur.

Bukti :
(1) ⇒ (2)
Misalkan R gelanggang uniserial. Karena R uniserial dari sifat sebelumnya didapat R lokal dan Artin, sekarang tinggal ditunjukan R gelangang ideal utama. Karena R gelanggang uniserial, maka modul regularnya punya deret komposisi yang tunggal, misal $\{0\} = R_0 \subseteq R_1 \subseteq \cdots \subseteq R_{k-1} \subseteq R_k = R$ adalah deret

komposisinya dengan panjangnya k, dari sifat sebelumnya semua submodul dari R adalah $\{R_m\}$, dengan $m = 0, 1, 2, \ldots, k$. Sekarang tinggal ditunjukkan bahwa R_m dibangun oleh satu unsur untuk setiap m.

Untuk R_0 jelas dibangun oleh satu unsur yaitu 0. Ambil $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ sebarang, misalkan $a \in R_i$, tapi $a \notin R_{i-1}$, maka aR adalah submodul R_i, tapi $R_i - 1 \neq aR$ karena $a_1 = a \notin R_{i-1}$. Andaikan aR tidak memuat R_{i-1}, maka bisa dibangun rantai baru yaitu $R0 \subset aR \subset R_1 \subset \cdots .. \subset R_{k-1} \subset R_k = R$, dan dari sifat sebelumnya rantai ini bisa kita perhalus jadi deret komposisi yang lain dari R (kontradiksi dengan R uniserial). Jadi haruslah aR memuat R_{i-1}.

Karena R_i/R_{i-1} adalah modul sederhana, dari sifat sebelumnya kita tahu tidak ada submodul lain diantara R_i dan R_{i-1}, jadi $R_i = aR$, jadi R_i dibangun oleh satu unsur. Karena i diambil sebarang maka setiap submodul R senantiasa dibangun oleh satu unsur. Jadi R gelanggang ideal utama.

(2) ⇒ (3)

Misalkan R gelanggang Artin, lokal, dan gelanggang ideal utama. Misal J adalah ideal maksimal dari R, karena R lokal maka J tunggal, dari sifat sebelumnya kita peroleh $J(R) = J$. Karena R gelanggang ideal utama maka $J = J(R)$ dibangun oleh satu unsur.

(3) ⇒ (1)

Misalkan R Artin, lokal dan memiliki Jacobson radical yang dibangun oleh satu unsur. Karena R lokal maka ideal utama maksimal R unik, namakan J. Dari definisi $J(R)$ adalah irisan semuah ideal maksimal R. maka didapatkan $J(R) = J$. Jadi J dibangun oleh satu unsur, namakan a, maka $J = Ra$. Misal $a = 0$, maka $J = \{0\}$, jelas R gelanggang uniserial. Sekarang misalkan $a \neq 0$, menurut Teorema 2.3, $Ja = Ra^2 = J^2$ adalah submodul maksimal dari Ra, jadi $R_2 = Ra^2$. Dengan cara sama, didapatkan $R_k = Ra^k = J^k$ untuk semua k. Jadi kita punya suatu barisan turun $\ldots. \subseteq J^n \subseteq \cdots \ldots \subseteq J^2 \subseteq J \subseteq R$, dengan J^k/J^{k-1} sederhana untuk setiap k.

Karena R Artin maka koleksi submodul R yang isinya semuah submodul dari barisan diatas ini punya unsur minimal, misal J^m, jadi $J^{m+i} = J^m$ untuk setiap i. Atau dengan kata lain $Ra^m = Ra^{m+i}$ untuk setiap i. Jadi $1a^{m+1} = 1a^m$ atau $am^{a-1} = 0$, andaikan $a - 1$ tidak punya invers, maka $R(a-1)$ adalah submodul R yang tak trivial, karena $1 \notin R(a-1)$. Karena J ideal maksimal, maka $R(a-1) \subseteq J$, akibatnya $a - 1 \in J$, ini menyebabkan $1 \in J$ (Kontradiksi dengan J ideal maksimal). Jadi harusnya $a - 1$ punya invers, ini mengakibatkan $am = 0$, jadi $J^m = \{0\}$.

Jadi diperoleh barisan $\{0\} \subset J^{m-1} \subset \cdots .. \subset J^2 \subset J \subset R$ dengan R/J dan J^i/J^{i+1} sederhana untuk $i \in \{1,2,\ldots,m-1\}$, jadi barisan ini adalah deret komposisi. Menurut Teorema 2.10, R gelanggang uniserial. ∎

3. Kesimpulan

Tanpa melibatkan ketunggalan deret komposisi, gelanggang uniserial dapat dikarakterisasi menjadi gelanggang Artin dan lokal yang ideal utama atau yang memiliki radikal Jacobson yang dibangun oleh satu unsur.

4. Daftar Pustaka

[1] Arifin, S., Garminia, H., and Astuti, P., Finitely Generated Modules's Uniserial Dimensions Over a Discrete Valuation Domain, *Mathematics and Statistics 9(4)*, 521 – 526, 2021.

[2] Garminia, H., Astuti, P., Irawati, Note on Dedekind Modules, *International Journal of Algebra 5 (10)*, 491-498, 2011.

[3] Hijriati, N., Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., On representation of a ring on a free module over a commutative ring with identity, *Journal of Physics: Conference Series 893 (1)*, 012010, 2017.

[4] Juliana, R., Wardhana, I. G. A. W., and Irwansyah, Some Characteristics of Cyclic Prime, Weakly Prime and Almost Prime Submodule of Gaussian Integer Modulo Over Integer, *AIP Conference Proceedings 2329 (1)*, 020004, 2021

[5] Maulana, F., Wardhana, I. G. A. W., and Switrayni, N. W., Ekivalensi Ideal Hampir Prima dan Ideal Prima pada Bilangan Bulat Gauss, *Eigen Mathematics Journal 1 (1)*, 1-5, 2019.

[6] Misuki, W. U., Wardhana, I. G. A. W., and Switrayni, N. W., Some Characteristics of Prime Cyclic Ideal On Gaussian Integer Ring Modulo, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 1115 (1)*, 012084, 2021.

[7] Wardhana, I. G. A. W., Nghiem, N. D. H., Switrayni, N. W., Aini, Q., A Note On Almost Prime Submodule Of CSM Module Over Principal Ideal Domain, *Journal of Physics: Conference Series 2106 (1)*, 012011, 2021.

[8] Wardhana, I. G. A. W., Astuti, P., and Muchtadi-Alamsyah, I., On Almost Prime Submodules of a Module over a Principal Ideal Domain, *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications 38 (2)*, 121-128, 2016.

[9] Wisbauer, Robert, *Foundation of Module and Ring Theory,* Gordon and Breach, 1991.