

# Basis untuk Ruang Pencacah Bobot Kode Linier atas $GF(4)$

Nur Hamid<sup>1</sup>, Intan Putri Wardani<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universitas Nurul Jadid, nurhamid@unuja.ac.id

<sup>2</sup>Universitas Nurul Jadid, ip5881540@gmail.com

**Abstract.** This study discusses the basis of a polynomial space generated by the weight enumerators of linear codes over  $GF(4)$  for several lengths, namely 2, 4, 6, 8, and 10. The results of the study show that each set of weight counters forms a space with dimensions that depend on the length of the code, namely 1, 1, 2, 4, and 5. This shows that the longer the code, the larger the dimensions of the space obtained.

**Keywords:**  $GF(4)$  linear code, pencacah bobot, polynomial base range.

**Abstrak.** Studi ini membahas basis ruang polinomial yang dihasilkan oleh enumerator bobot kode linear di atas  $GF(4)$  untuk beberapa panjang, yaitu 2, 4, 6, 8, dan 10. Hasil penelitian menunjukkan bahwa setiap kumpulan pencacah bobot membentuk ruang dengan dimensi yang bergantung pada panjang kode, yaitu 1, 1, 2, 4, dan 5. Hal ini menunjukkan bahwa semakin panjang kode, semakin besar dimensi ruang yang diperoleh.

**Kata Kunci:** kode linier  $GF(4)$ , pencacah bobot, basis.

## 1 Pendahuluan

Teori pengkodean (*coding theory*) merupakan cabang matematika yang mempelajari cara menyusun data ke dalam bentuk kode agar informasi tetap dapat dikirim dengan baik meskipun terjadi kesalahan saat proses pengiriman data [1]. Salah satu objek penting dalam teori pengkodean adalah kode linear, yaitu himpunan kode yang membentuk ruang vektor atas lapangan hingga.

Penelitian mengenai kode linear tidak hanya dilakukan pada  $GF(2)$ , tetapi juga berkembang pada lapangan hingga yang lebih besar, seperti  $GF(4)$ . Kode linear atas  $GF(4)$  memiliki struktur yang lebih beragam sehingga banyak digunakan dalam berbagai penelitian, seperti kode DNA dan kajian struktur aljabar kode [2]. Selain itu, kode atas  $GF(4)$  dapat menghasilkan bentuk kode yang lebih bervariasi dibandingkan kode biner.

Salah satu cara untuk menganalisis kode linear adalah menggunakan pencacah bobot. Pencacah bobot menyatakan banyaknya kata kode berdasarkan bobot Hamming dalam bentuk polinomial [3]. Melalui pencacah bobot, sifat-sifat kode linear dapat dipelajari secara lebih teratur. Penelitian mengenai pencacah bobot terus berkembang, baik dalam kajian teoritis maupun penerapannya pada berbagai kelas kode linear[4]. Beberapa penelitian lain juga membahas hubungan pencacah

bobot dengan struktur kode linear melalui identitas MacWilliams dan pencacah bobot lengkap [5].

Selain digunakan untuk melihat sifat kode, pencacah bobot juga dapat dipandang sebagai elemen dalam ruang polinomial [6]. Kumpulan pencacah bobot dari beberapa kode linear dapat membentuk suatu ruang polinomial. Untuk mempelajari ruang tersebut, dapat ditentukan basis ruang polinomial sehingga hubungan linear antar pencacah bobot dapat diketahui. Namun, penelitian mengenai basis ruang polinomial yang dibentuk oleh pencacah bobot kode linear self-dual atas  $GF(4)$  masih jarang dibahas. Sebagian besar penelitian sebelumnya lebih berfokus pada pembentukan kode dan distribusi bobot, sedangkan pembahasan mengenai basis ruang polinomialnya masih terbatas.

Oleh karena itu, penelitian ini difokuskan pada penentuan basis ruang polinomial yang dibentuk oleh pencacah bobot kode linear atas  $GF(4)$ . Kode yang digunakan diambil dari database Euclidean Self-Dual Codes over  $GF(4)$ [7]. Melalui penelitian ini diharapkan dapat diperoleh basis ruang polinomial dari pencacah bobot kode linear self-dual atas  $GF(4)$  untuk panjang kode tertentu.

## 2 Teori Dasar

### 2.1 Lapangan Hingga $GF(4)$

Lapangan hingga  $GF(4)$  merupakan lapangan dengan empat elemen yang dapat dinyatakan sebagai

$$GF(4) = \{0, 1, \omega, \omega^2\},$$

dengan  $\omega$  memenuhi relasi

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0.$$

Beberapa relasi penting pada  $GF(4)$

$$\omega^2 = \omega + 1$$

dan

$$\omega^3 = 1.$$

Lapangan hingga  $GF(4)$  banyak digunakan dalam teori pengkodean karena memiliki struktur aljabar yang sesuai untuk membangun kode linear dan kode self-dual [6].

### 2.2 Kode Linear

Kode linear merupakan subruang dari ruang vektor  $GF(q)^n$  dengan panjang kode  $n$  dan dimensi  $k$ . Suatu kode linear biasanya dinyatakan sebagai kode  $[n, k]$ . Jika  $G$  adalah matriks berukuran  $k \times n$  dengan entri pada  $GF(q)$ , maka  $G$  disebut matriks pembangun dari kode linear. Setiap codeword pada kode linear dapat diperoleh dari

$$c = uG,$$

dengan  $u \in GF(q)^k$ .

### 2.3 Self-Dual Codes

Misalkan  $C$  adalah kode linear pada  $GF(q)$ . Untuk  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  dan  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  di  $GF(q)^n$ , hasil kali titik (*dot product*) didefinisikan sebagai

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

Dual code dari  $C$  didefinisikan sebagai

$$C^\perp = \{x \in GF(q)^n \mid x \cdot y = 0, \forall y \in C\}$$

Suatu kode disebut self-dual apabila

$$C = C^\perp$$

Pada penelitian ini digunakan kode Euclidean self-dual Type I atas  $GF(4)$ .

#### 2.4 Pencacah bobot

Misalkan  $C$  adalah kode linear dengan panjang  $n$  atas  $GF(q)$ . Untuk setiap codeword  $c \in C$ , didefinisikan bobot Hamming  $wt(c)$  sebagai banyaknya komponen tak nol pada  $c$ . Pencacah bobot dari kode  $C$  adalah polinomial dua variabel yang didefinisikan sebagai

$$W_C(x, y) = \sum_{c \in C} x^{n-wt(c)} y^{wt(c)}$$

Dengan demikian, setiap codeword pada kode  $C$  memberikan kontribusi berupa suku  $x^{n-wt(c)} y^{wt(c)}$  pada polinomial tersebut. Pencacah bobot ini dapat digunakan untuk mempelajari sifat aljabar dari suatu kode linear, khususnya terkait struktur dan karakteristik codeword di dalamnya [4].

#### 2.5 Basis Ruang Polinomial

Misalkan diberikan beberapa polinomial

$$p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$$

Himpunan semua kombinasi linear dari polinomial-polinomial tersebut,

$$a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + \dots + a_n p_n(x)$$

dengan  $a_i$  merupakan skalar, membentuk suatu ruang polinomial. Suatu himpunan polinomial dikatakan basis apabila himpunan tersebut bebas linear dan dapat membentang ruang polinomial yang dibentuk. Basis ruang polinomial digunakan untuk menentukan himpunan polinomial yang saling bebas linear dan dapat merepresentasikan seluruh elemen pada ruang tersebut.

### 3 Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini disajikan hasil perhitungan pencacah bobot dan penentuan basis ruang polinomial dari kode linear self-dual Type I atas  $GF(4)$ . Analisis dilakukan berdasarkan panjang kode yang digunakan, yaitu panjang 2, 4, 6, 8, dan

10. Setiap pencacah bobot direpresentasikan dalam bentuk vektor koefisien, kemudian disusun ke dalam matriks untuk menentukan basis.

### 3.1 Kode Panjang 2

Pada kode panjang 2 digunakan 1 matriks pembangun  $G_1$ . Dari matriks pembangun tersebut diperoleh 1 pencacah bobot yang dapat diambil sebagai basis. Matriks pembangun yang digunakan

$$G_1 = [1 \quad 1]$$

Matriks pembangun tersebut menghasilkan pencacah bobot

$$W_{C_1} = 3x^2 + y^2.$$

Hasilnya menunjukkan terdapat satu basis sehingga dimensi ruang polinomial adalah 1. Dengan demikian, basis ruang polinomial yang diperoleh adalah

$$\{W_{C_1}\}.$$

### 3.2 Kode Panjang 4

Pada kode panjang 4 digunakan 1 matriks pembangun  $G_1$ . Dari matriks pembangun tersebut diperoleh 1 pencacah bobot yang dapat diambil sebagai basis. Matriks pembangun yang digunakan

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks pembangun tersebut menghasilkan pencacah bobot

$$W_{C_1} = 3x^2y^2 + y^4$$

Hasilnya menunjukkan terdapat satu basis sehingga dimensi ruang polinomial adalah 1. Dengan demikian, basis ruang polinomial yang diperoleh

$$\{W_{C_1}\}$$

### 3.3 Kode Panjang 6

Pada kode panjang 6 digunakan 2 matriks pembangun  $G_1$  dan  $G_2$ . Dari kedua matriks pembangun tersebut diperoleh 2 pencacah bobot yang dapat diambil sebagai basis. Matriks pembangun yang menghasilkan basis tersebut

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \omega & \omega^2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks pembangun tersebut menghasilkan pencacah bobot

$$W_{C_1} = x^6 + 9x^4y^2 + 36x^2y^4 + 18y^6$$

$$W_{C_2} = x^6 + 12x^3y^3 + 18x^2y^4 + 27xy^5 + 6y^6$$

Hasilnya menunjukkan terdapat dua kolom pivot sehingga dimensinya adalah 2. Dengan demikian, basis ruang polinomial yang diperoleh

$$\{W_{C_1}, W_{C_2}\}.$$

### 3.4 Kode Panjang 8

Pada kode panjang 8 digunakan 6 matriks pembangun  $G_1, G_2, \dots, G_6$ . Dari keenam matriks pembangun tersebut, diperoleh empat pencacah bobot yang dapat diambil sebagai basis. Matriks pembangun yang menghasilkan basis tersebut

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & \omega & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \omega & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \omega & 1 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \omega & 0 & 1 & \omega \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 & \omega \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \omega^2 & 0 & \omega^2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \omega & 0 & 1 & \omega \end{bmatrix} \quad G_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \omega & \omega^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \omega^2 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks pembangun tersebut menghasilkan pencacah bobot

$$W_{C_1} = x^8 + 12x^4y^4 + 51y^8$$

$$W_{C_2} = x^8 + 12x^4y^4 + 3y^8$$

$$W_{C_3} = x^8 + 6x^4y^4 + 24x^2y^6 + 33y^8$$

$$W_{C_4} = x^8 + 24x^4y^4 + 24x^2y^6 + 15y^8$$

Dengan demikian, basis ruang polinomial yang diperoleh

$$\{W_{C_1}, W_{C_2}, W_{C_3}, W_{C_4}\}.$$

### 3.5 Kode Panjang 10

Pada kode panjang 10 digunakan 17 matriks pembangun  $G_1, G_2, \dots, G_{17}$ . Dari ke-17 matriks pembangun tersebut, diperoleh lima pencacah bobot yang dapat diambil sebagai basis. Matriks pembangun yang menghasilkan basis tersebut

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega^2 & \omega \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \omega & \omega^2 & \omega & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \omega & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 & \omega & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 & \omega & \omega & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & \omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \omega^2 & \omega & \omega^2 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega^2 & \omega^2 & 1 & \omega^2 & \omega^2 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega^2 & \omega & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 & 0 & \omega^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \omega & \omega^2 & \omega & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \omega & \omega & \omega & \omega & \omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega & 1 & 1 & \omega & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 & 0 & \omega^2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & \omega & \omega^2 & \omega \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & \omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \omega^2 & 0 & 0 & 1 & \omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega & 0 & 1 & \omega \end{bmatrix}$$

$$G_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 & \omega & \omega & \omega \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \omega & 0 & 1 & 1 & 1 & \omega \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \omega^2 & 0 & \omega^2 & \omega^2 & \omega^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \omega & 1 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega & 0 & 1 & \omega \end{bmatrix}$$

Kelima matriks pembangun tersebut menghasilkan pencacah bobot sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{C_1} &= 84x^{10} + 120x^9y + 345x^8y^2 + 240x^7y^3 + 180x^6y^4 \\ &\quad + 24x^5y^5 + 30x^4y^6 + y^{10}, \\ W_{C_2} &= 63x^{10} + 180x^9y + 300x^8y^2 + 240x^7y^3 + 165x^6y^4 \\ &\quad + 60x^5y^5 + 15x^4y^6 + y^{10}, \\ W_{C_3} &= 54x^{10} + 216x^9y + 243x^8y^2 + 288x^7y^3 + 138x^6y^4 \\ &\quad + 72x^5y^5 + 12x^4y^6 + y^{10}, \\ W_{C_4} &= 57x^{10} + 174x^9y + 318x^8y^2 + 258x^7y^3 + 147x^6y^4 \\ &\quad + 42x^5y^5 + 21x^4y^6 + 6x^3y^7 + y^{10}, \\ W_{C_5} &= 51x^{10} + 213x^9y + 252x^8y^2 + 297x^7y^3 + 129x^6y^4 \\ &\quad + 63x^5y^5 + 15x^4y^6 + 3x^3y^7 + y^{10}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, basis ruang polinomial yang diperoleh

$$\{W_{C_1}, W_{C_2}, W_{C_3}, W_{C_4}, W_{C_5}\}.$$

Ringkasan hasil penentuan dimensi ruang polinomial pencacah bobot disajikan pada Tabel 1.

**Tabel 1.** Dimensi ruang polinomial

<b>n</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>10</b>
$ G_n $	1	1	2	6	17
$dim(Vn)$	1	1	2	4	5

Berdasarkan Tabel 1, diperoleh bahwa dimensi ruang polinomial pencacah bobot untuk panjang kode 2, 4, 6, 8, dan 10 berturut-turut adalah 1, 1, 2, 4, dan 5.

## 4 Kesimpulan

Dalam penelitian ini, diperoleh basis ruang polinomial yang dibentuk oleh pencacah bobot dari kode linear atas  $GF(4)$  untuk beberapa panjang kode, yaitu 2, 4, 6, 8, dan 10. Berdasarkan hasil yang diperoleh, terlihat bahwa dimensi ruang pencacah bobot meningkat seiring bertambahnya panjang kode. Untuk panjang kode 2 dan 4 diperoleh dimensi ruang sebesar 1, panjang 6 memiliki dimensi 2, panjang 8 memiliki dimensi 4, dan panjang 10 memiliki dimensi 5. Hasil ini menunjukkan bahwa semakin besar panjang kode, maka variasi pencacah bobot yang dihasilkan juga semakin beragam, sehingga ruang vektor yang dibentuk memiliki dimensi yang lebih tinggi.

## 5 Daftar Pustaka

- [1] MacWilliams, *The Theory of Error-Correcting Codes*. 1997.
- [2] J. L. Butar-Butar dan M. Br. Bukit, “Metode Reversible Self-Dual untuk Konstruksi Kode DNA atas Lapangan Hingga  $GF(4)$ ,” *Jambura J. Math*, vol. 4, no. 2, hlm. 188–199, Jun 2022, doi: 10.34312/jjom.v4i2.13583.
- [3] P. V, *Introduction to the Theory of Error-Correcting Codes*. Wiley-Interscience. 1998.
- [4] V. Chauhan dan A. Sharma, “Hamming pencacah bobots of multi-twisted codes with at most two non-zero constituents,” *Finite Fields and Their Applications*, vol. 76, hlm. 101910, Des 2021, doi: 10.1016/j.ffa.2021.101910.
- [5] I. Mukarramah dan N. Hamid, “Application of MacWilliams’ Theorem for Complete Pencacah bobots on Galois Fields”.
- [6] H. and V. Pless, *Fundamentals of Error-Correcting Codes*. 2003.
- [7] M. H. Munemasa, “Database of euclidean self-dual codes over  $gf(4)$ .” 2025. [Daring]. Tersedia pada: <https://www.math.is.tohoku.ac.jp/munemasa/research/codes/F4.htm> [Diakses : 10 Desember 2025]