Jurnal UJMC, Volume 4, Nomor 2, Hal. 7 - 13
pISSN : 2460-3333 eISSN : 2579-907X

DIMENSI METRIK GRAF DUAL PRISMA

Fenny Fitriani[1]

[1]Universitas PGRI Adi Buana Surabaya, fenny_f@unipasby.ac.id

Abstract. The form of a graph which formed from a graph has no intersecting side is called a dual graph. One graph that can be formed as a dual graph is a prism graph. Prism graph ($P_{m,n}$) is a graph formed from the results of a cartesian product of a cycle graph with a line graph. In this paper we discuss the metric dimension of a dual prism graph ($P'_{m,n}$). The metric dimension of a dual prism graph is divided into two states, when $n = 2$ and $n \geq 3$.

Keywords: *Dual graph, prism graph, metric dimension.*

Abstrak. Bentuk graf yang dibentuk dari graf yang tidak memiliki sisi yang berpotongan disebut sebagai graf dual. Salah satu graf yang dapat dibentuk sebagai graf dual adalah graf prisma. Graf prisma ($P'_{m,n}$) merupakan graf yang terbentuk dari hasil produk kartesian graf sikel dengan graf garis. Dalam paper ini dibahas mengenai dimensi metrik dari graf dual prisma ($P'_{m,n}$). Dimensi metrik dari graf dual prisma terbagi dalam dua keadaan yaitu pada saat $n = 2$ dan $n \geq 3$.

Kata Kunci: *Graf dual, graf prisma, dimensi metrik.*

1 Pendahuluan

Salah satu bentuk dari graf adalah graf dengan sisi yang tidak saling berpotongan atau disebut juga sebagai graf planar. Contoh dari bentuk graf tersebut adalah graf pohon, graf prisma, dan graf antiprisma. Dari graf planar tersebu dapat dibentuk suatu graf baru yang disebut dengan graf dual. Simpul dari graf dual merupakan *region r* pada graf planar. Dua simpul pada graf dual dapat dihubungkan dengan suatu sisi jika dan hanya jika dua *region* yang diwakili oleh kedua simpul tersebut dipisahkan oleh sisi pada graf palanar pembentuknya [1]. Beberapa penelitan yang telah dilakukan dengan menggunakan graf dual antara lain penggunaan graf dual sebagai dasar pewarnaan peta kotamadya [6], sifat dari graf euler jika dihubungkan dengan graf dual [7], penandaan jaringan sosial berdasarkan graf dual [12], dan karakteristik dari graf dual parsial [5]

Salah satu subjek yang dipelajari dalam teori graf adalah dimensi metrik dari graf. Jika dimisalkan suatu graf G, maka dimensi metrik $\dim(G)$ dari graf merupakan nilai kardinalitas minimum dari himpunan pembeda W. Himpunan pembeda W merupakan himpunan simpul $W \subseteq V(G)$ dimana representasi relatif simpul $v \in V(G)$ terhadap W dapat dituliskan sebagai $r(v|W) = \left(d(v, w_1), d(v, w_2), \ldots, d(v, w_n)\right)$ dengan $d(v, w_i)$ merupakan panjang lintasan minimum antara simpul v dengan simpul w_i untuk setiap $1 \leq i \leq n$. Himpunan pembeda W merupakan himpunan pembeda dari graf G jika untuk sebarang simpul dalam G memenuhi $r(v|W) \neq r(u|W)$ dengan $v \neq u$ dan $u, v \in V(G)$ [3]. Beberapa penelitian mengenai dimensi metrik antara lain dimensi metrik graf $K_r + mK_s$ dengan $m, r, s \in N$ [4], dimensi metrik dan dimensi partisi dari famili graf tangga [9], dimensi metrik graf pohon bentuk tertentu [8], analisis dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung pada graf khusus keluarga pohon dikaitkan keterampilan berpikir tingkat tinggi [10], dan dimensi metrik graf amal (nKm) [11].

Dari penjabaran diatas, dalam artikel ini dibahas mengenai dimensi metrik dari graf dual yang dibangun dari salah satu graf planar. Graf planar yang dimaksud adalah graf prisma P_m^n yang merupakan hasil dari *cartesian product* antara $C_m \times P_n$.

2 Pembahasan

Sebelum menemukan nilai dimensi metrik dari graf dual yang dibentuk dari graf prisma, maka diperlukan bentuk umum dari graf dual prisma. Dari bentuk umum tersebut kemudian dicari dimensi metrik dari graf yang terbentuk.

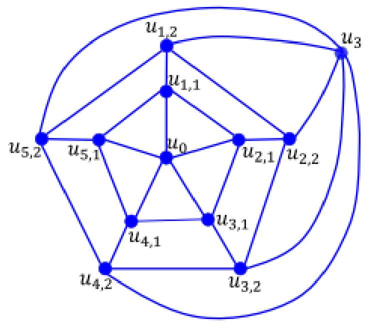
2.1 Graf dual prisma

Bentuk umum dari graf dual yang dibentuk dari graf prisma dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1. *Graf $P'_{m,n}$ merupakan graf dual yang dibentuk dari graf prisma P_m^n dengan $m, n \geq 1$.*

Himpunan simpul dari graf $P'_{m,n}$ adalah $V(P'_{m,n}) = \{u_0, u_n\} \cup \{u_{i,j} | 1 \leq i \leq m$ dan $i \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi dari graf $P'_{m,n}$ dapat dinyatakan sebagai $E(P'_{m,n}) = \{u_0 u_{i,1} | 1 \leq i \leq m\} \cup \backslash \{u_{i,j} u_{i+1,j} | 1 \leq i < m$ dan $1 \leq j < n\} \cup \{u_{m,j} u_{1,j} | 1 \leq j < n\} \cup \{u_{i,j} u_{i,j+1} | 1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n-2\} \cup \{u_{i,n-1} u_n | 1 \leq i \leq m\}$. Dengan kata lain $|V(P'_{m,n})| = m(n-1) + 2$ dan $|E(P'_{m,n})| = m(2n-1)$.

Gambar 1 merupakan contoh graf dual $P'_{5,3}$ yang dibentuk dari graf prisma $C_5 \times P_3$. Himpunan simpul dari graf $P'_{5,3}$ adalah $V(P'_{5,3}) = \{u_0, u_{i,1}, u_{i,2}, u_3\}$ dengan $1 \leq i \leq 5$ dan himpunan sisi dari graf $P'_{5,3}$ adalah $E(P'_{5,3}) = \{u_0 u_{i,1} | 1 \leq i \leq 5\} \cup \{u_{i,j} u_{i+1,j} | 1 \leq i < 5 \text{ dan } 1 \leq j < 3\} \cup \{u_{5,j} u_{1,j} | 1 \leq j < 3\} \cup \{u_{i,1} u_{i,2}\} | 1 \leq i \leq 5\} \cup \{u_{i,2} u_3 | 1 \leq i \leq 5\}$



Gambar 1. Graf dual $P'_{5,3}$

2.2 Dimensi metrik graf dual prisma

Berikut diberikan lemma yang akan digunakan sebagai pembuktian dalam pembuktian dimensi metrik graf dual prisma

Lemma 2.1 Misalkan u dan v merupakan simpul yang ada pada graf G. Jika (1) simpul u dan v tidak bertetangga dan $N(u) = N(v)$ atau (2) simpul u dan v bertetangga dan $N[u] = N[v]$, maka setiap himpunan pembeda dari G memuat paling sedikit salah satu dari simpul u dan v [2].

Dimensi metrik dari graf dual prisma $P'_{m,n}$ didapatkan dalam dua keadaan yaitu pada saat $n = 2$ dan $n \geq 3$. Berikut diberikan teorema graf dual prisma $P'_{m,n}$ dengan $n = 2$:

Teorema 2.1 Jika $P'_{m,2}$ adalah graf dual dari graf P_m^2 dengan $m \geq 3$, maka

$$\dim\left(P'_{m,2}\right) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } 3 \leq m \leq 6 \\ \left\lceil \dfrac{2m+2}{5} \right\rceil + 1, & \text{untuk } m \geq 7 \end{cases} \tag{1}$$

Bukti:
Dalam pembuktian ini dilakukan dalam 3 kasus yaitu:
Kasus 1: Ditunjukkan $\dim\left(P'_{m,2}\right) = 3$ pada $3 \leq m \leq 5$. Untuk batas atas jika dimisalkan diambil $W = \{u_0, u_{1,1}, u_{2,1}\} \subset V\left(P'_{m,2}\right)$. Dari W tersebut sedemikian hingga didapatkan hasil representasi jarak antara simpul u terhadap W berbeda, dengan kata lain himpunan W merupakan himpunan pembeda dari $P'_{m,2}$ untuk $3 \leq m \leq 5$ sehingga $\dim\left(P'_{m,n}\right) \leq 3$. Selanjutnya untuk batas bawah dimensi metrik, simpul u_0 dan simpul u_2 memiliki simpul-simpul ketetanggaan yang sama, sehingga sesuai dengan Lemma 1 salah satu simpul dari simpul u_0 dan u_2 harus masuk kedalam himpunan pembeda W mengakibatkan $\dim\left(P'_{m,2}\right) \geq 1$. Karena graf $P'_{m,2}$ bukan graf lintasan, maka $\dim\left(P'_{m,2}\right) \geq 2$. Untuk simpul $u_{i,1}$ yang ada pada sikel memiliki diameter yang sama yaitu $\operatorname{diam}(u_{i,1}, u_{j,1}) = 2$ untuk $i \neq j$. Karena setiap gap pada W paling sedikit memuat satu dan paling banyak memuat tiga simpul dari graf C_n, serta paling banyak satu gap pada W

memua tepat tiga simpul maka $\dim(P'_{m,2}) \geq 3$. Karena $3 \leq \dim(P'_{m,2}) \leq 3$, maka $\dim(P'_{m,2}) = 3$ untuk $3 \leq m \leq 5$.

Kasus 2. Ditunjukkan $\dim(P'_{m,2}) = 3$ pada $m = 6$. Untuk batas atas jika dimisalkan diambil $W = \{u_0, u_{1,1}, u_{3,1}\} \subset V(P'_{m,2})$. Dari W tersebut sedemikian hingga didapatkan hasil representasi jarak antara simpul u terhadap W berbeda, dengan kata lain himpunan W merupakan himpunan pembeda dari $P'_{m,2}$ untuk$m = 6$ sehingga $\dim(P'_{m,n}) \leq 3$. Selanjutnya untuk batas bawah dimensi metrik, simpul u_0 dan simpul u_2 memiliki simpul-simpul ketetanggaan yang sama, sehingga sesuai dengan Lemma 1 salah satu simpul dari simpul u_0 dan u_2 harus masuk kedalam himpunan pembeda W mengakibatkan $\dim(P'_{m,2}) \geq 1$. Karena graf $P'_{m,2}$ bukan graf lintasan, maka $\dim(P'_{m,2}) \geq 2$. Untuk simpul $u_{i,1}$ yang ada pada sikel memiliki diameter yang sama yaitu $\text{diam}(u_{i,1}, u_{j,1}) = 2$ untuk $i \neq j$. Karena setiap gap pada W paling sedikit memuat satu dan paling banyak memuat tiga simpul dari graf C_n, serta paling banyak satu gap pada W memua tepat tiga simpul maka $\dim(P'_{m,2}) \geq 3$. Karena $3 \leq \dim(P'_{m,2}) \leq 3$, maka $\dim(P'_{m,2}) = 3$ untuk $m = 6$.

Kasus3: ditunjukkan $\dim(P'_{m,2}) = \left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor + 1$ pada $m \geq 7$. Untuk batas atas, misalkan pola dari pengambilan gap dapat ditulis dalam barisan berurutan $\left\{g_1, g_2, \dots g_{\left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor}\right\}$ dimana g_i adalah jumlah simpul yang ada pada gap. Dari permisalan tersebut didapatkan pola gap dari $m \geq 12$ mengikuti pola pada $m \in \{7,8,9,10,11\}$ dengan penambahan gap $\{1,2\}$ sebanyak i dengan pola pengulangan pada $m + 5$. Dari pola tersebut dapat dikonstruksikan W sebagai berikut:

a. Untuk m mod 5 $\equiv 2$ atau 3
   Misalkan $m = 5k + 2$ atau $m = 5k + 3$, maka didapatkan $\left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor = 2k + 1$ dengan $k \geq 1$. Sehingga didapatkan $W = \{u_{1+5j,1}, u_{3+5j,1} \mid 0 \leq j < k\} \cup \{u_{5k,1}\}$. Karena W memuat $2k + 1$ simpul dan dengan menggunakan ketentuan yang ada pada kasus (1), maka untuk setiap $u_{i,1} \in V(P'_{m,2})$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W, tetapi $r(u_0|W) = r(u_2|W)$.
b. Untuk m mod 5 $\equiv 4$
   Misalkan $m = 5k + 4$, maka didapatkan $\left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor = 2k + 2$ dengan $k \geq 1$. Sehingga didapatkan $W = \{u_{3+5j,1}, u_{6+5j,1} \mid 0 \leq j < k\} \cup \{u_{1,1}, u_{5k+3,1}\}$. Karena W memuat $2k + 2$ simpul dan dengan menggunakan ketentuan yang ada pada kasus (1), maka untuk setiap $u_{i,1} \in V(P'_{m,2})$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W, tetapi $r(u_0|W) = r(u_2|W)$.
c. Untuk m mod 5 $\equiv 0$ atau 1
   Misalkan $m = 5k$ atau $m = 5k + 1$, maka didapatkan $\left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor = 2k$ dengan $k \geq 1$. Sehingga didapatkan $W = \{u_{3+5j,1}, u_{6+5j,1} \mid 0 \leq j < k - 1\} \cup \{u_{1,1}, u_{5k-2,1}\}$. Karena W memuat $2k$ simpul dan dengan menggunakan

ketentuan yang ada pada kasus (1), maka untuk setiap $u_{i,1} \in V(P'_{m,2})$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W, tetapi $r(u_0|W) = r(u_2|W)$.

Dari ketiga kasus (a)-(c), didapatkan $r(u_0|W) = r(u_2|W)$, sehingga salah satu dari simpul u_0 dan u_2 harus masuk kedalam W. Hal tersebut mengakibatkan kardinalitas minimum dari W adalah $|W| = \left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor + 1$, dengan kata $\dim(P'_{m,2}) \leq \left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor + 1$.

Untuk batas bawah dari dimensi metrik, misalkan $\dim(P'_{m,2}) = \left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor$. Jika $\left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor$ simpul berada pada sikel, maka $r(u_0|W) = r(u_2|W)$. Jika $u_0, u_2 \in W$ maka akan terdapat representasi yang sama untuk simpul yang ada pada sikel. Dari uraian tersebut didaptakan $|W| \geq \left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor + 1$, dengan kata lain $\dim(P'_{m,2}) \geq \left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor + 1$. Karena $\left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor + 1 \leq \dim(P'_{m,2}) \leq \left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor + 1$, maka $\dim(P'_{m,2}) = \left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor + 1$ untuk $m \geq 7$. ■

Sedangkan untuk dimensi metrik dari graf dual prisma $P'_{m,n}$ dengan $n \geq 3$ diberikan pada teorema berikut:

Teorema 2.2 Jika $P'_{m,n}$ adalah graf dual dari graf P_m^n dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, maka

$$\dim(P'_{m,n}) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } 3 \leq m \leq 5 \\ \left\lceil \frac{2m}{5} \right\rceil, & \text{untuk } m \geq 6 \end{cases} \qquad (2)$$

Bukti:

Dalam pembuktian ini dilakukan dalam 2 kasus yaitu:

Kasus 1: Ditunjukkan $\dim(P'_{m,n}) = 3$ pada $3 \leq m \leq 5$. Untuk batas atas jika dimisalkan diambil $W = \{u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}\}$. Dari W tersebut sedemikian hingga didapatkan hasil representasi jarak antara simpul u terhadap W berbeda, dengan kata lain W merupakan himpunan pembeda dari $P'_{m,n}$ untuk $3 \leq m \leq 5$ sehingga $\dim(P'_{m,n}) \leq 3$. Untuk batas bawah, dengan menggunakan ketentuan pada batas atas dan karena pada tiap simpul yang ada pada sikel pertama memiliki tetangga yang mengakibatkan jarak tiap simpul pada sikel pertama maksimal adalah 2. Untuk $m = 5$ mudah diketahui bahwa $\dim(P'_{m,n}) \geq 3$, untuk $m = 3$ dan $m = 4$ karena jarak tiap simpul maksimal 2 mudah diketahui bahwa $\dim(P'_{m,n}) \geq 2$. Pada $m = 3$, hasil representasi simpul sikel pertama yeng tersisa sama dengan hasil representasi simpul u_0, $r(u_{i,1}|W) = r(u_0|W)$, sehingga $\dim(P'_{m,n}) \geq 3$. Pada $m = 4$, hasil representasi simpul sikel pertama yang tersisa sama dengan 2 simpul dari sikel kedua yang bertetangga dengan simpul di W, $r(u_{i,1}\}|W) = r(u_{j,2}|W)$ untuk $i \neq j$, sehingga $\dim(P'_{m,n}) \geq 3$. Karena $3 \leq \dim(P'_{m,n}) \leq 3$ maka $\dim(P'_{m,n}) = 3$.

Kasus 2: ditunjukkan $\dim(P'_{m,n}) = \left\lceil \frac{2m}{5} \right\rceil$ pada $m \geq 6$. Untuk batas atas, misalkan pola dari pengambilan *gap* dapat ditulis dalam barisan berurutan $\left\{g_1, g_2, \dots g_{\left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor}\right\}$ dimana g_i adalah jumlah simpul yang ada pada *gap*. Dari permisalan tersebut didapatkan pola *gap* dari $m \geq 11$ mengikuti pola pada $m \in \{6,7,8,9,10\}$ dengan penambahan *gap* $\{1,2\}$ sebanyak i dengan pola pengulangan pada $m + 5$. Dari pola tersebut dapat dikonstruksikan W sebagai berikut:

d. Untuk m mod 5 $\equiv 1$ atau 2

   Misalkan $m = 5k + 1$ atau $m = 5k + 2$, maka didapatkan $\left\lceil \frac{2m}{5} \right\rceil = 2k + 1$ dengan $k \geq 1$. Sehingga didapatkan $W = \{u_{1+5j,1}, u_{3+5j,1} | 0 \leq j < k\} \cup \{u_{5k+1,1}\}$. Karena W memuat $2k + 1$ simpul dan dengan menggunakan ketentuan yang ada pada kasus (1), dimana nilai a pada kasus (2) ini terdiri dari $a \in \{1 + 5j, 3 + 5j, 5k + 1\}$ jika $0 \leq j < k$, maka untuk setiap $u \in V(P'_{m,n})$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W

e. Untuk m mod 5 $\equiv 3$ atau 4

   Misalkan $m = 5k + 3$ atau $m = 5k + 4$, maka didapatkan $\left\lceil \frac{2m}{5} \right\rceil = 2k + 2$ dengan $k \geq 1$. Sehingga didapatkan $W = \{u_{3+5j,1}, u_{6+5j,1} | 0 \leq j < k\} \cup \{u_{1,1}, u_{5k+3,1}\}$. Karena W memuat $2k + 2$ simpul dan dengan menggunakan ketentuan yang ada pada kasus (1), dimana nilai a pada kasus (2) ini terdiri dari $a \in \{1, 3 + 5j, 6 + 5j, 5k + 3\}$ jika $0 \leq j < k$, maka untuk setiap $u \in V(P'_{m,n})$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W.

f. Untuk m mod 5 $\equiv 0$

   Misalkan $m = 5k$, maka didapatkan $\left\lceil \frac{2m}{5} \right\rceil = 2k$ dengan $k \geq 1$. Sehingga didapatkan $W = \{u_{3+5j,1}, u_{6+5j,1} | 0 \leq j < k - 1\} \cup \{u_{1,1}, u_{5k-2,1}\}$. Karena W memuat $2k$ simpul dan dengan menggunakan ketentuan yang ada pada kasus (1), dimana nilai a pada kasus (2) ini terdiri dari $a \in \{1, 3 + 5j, 6 + 5j, 5k - 2\}$ jika $0 \leq j < k - 1$, maka untuk setiap $u \in V(P'_{m,n})$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W.

Dari ketiga kasus (a)-(c), didapatkan bahwa W merupakan himpunan pembeda, sehingga $\dim(P'_{m,n}) \leq \left\lceil \frac{2m}{5} \right\rceil$.

Untuk batas bawah dari dimensi metrik, misalkan $\dim(P'_{m,n}) = \left\lceil \frac{2m}{5} \right\rceil - 1$. Jika $\left\lceil \frac{2m}{5} \right\rceil - 1$ simpul berada pada sikel pertama, maka terdapat hasil representasi simpul yang sama terhadap W. Jika $\left\lceil \frac{2m}{5} \right\rceil - 1$ berada pada n sekel, maka terdapat representasi simpul yang sama terhadapat W. Dari uraian tersebut didaptakan $|W| \geq \left\lceil \frac{2m}{5} \right\rceil$, dengan kata lain $\dim(P'_{m,n}) \geq \left\lceil \frac{2m}{5} \right\rceil$. Karena $\left\lceil \frac{2m}{5} \right\rceil \leq \dim(P'_{m,n}) \leq \left\lceil \frac{2m}{5} \right\rceil$, maka $\dim(P'_{m,n}) = \left\lceil \frac{2m}{5} \right\rceil$ untuk $m \geq 6$.

3 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas, didapatkan bahwa dimensi metrik dari graf dual prisma $P'_{m,n}$ dapat dibagi dalam dua keadaan yaitu pada saat $n = 2$ dan $n \geq 3$. Dimensi metrik graf dual prisma ketika $n = 2$ adalah $\dim(P'_{m,2}) = 3$ dengan $3 \leq m \leq 6$ dan $\dim(P'_{m,2}) = \left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor + 1$ dengan $m \geq 7$. Dimensi metrik graf dual prisma ketika $n \geq 3$ adalah $\dim(P'_{m,n}) = 3$ dengan $3 \leq m \leq 5$ dan $\dim(P'_{m,n}) = \left\lceil \frac{2m}{5} \right\rceil$ dengan $m \geq 6$.

4 Daftar Pustaka

[1] Bondy, J. A., & Murty, U. (1976). *Graph Theory with Applications.* . Great Britain : The Macrniilan Press Ltd.
[2] Bringham, R., Chartrand, G., Dutton, R. D., & Zhang, P. (2003). Resolving Domination In Graphs. *Mathematica Bohemica, 128*(1), 25-36.
[3] Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M. A., & Oellermann, O. R. (2000). Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematic, 105*, 99-113.
[4] Hindayani. (2011, Mei). Dimensi Metrik Graf Kr + mKs, m,r,s elemen N. *CAUCHY, 1*(4), 165-174.
[5] Lakshmi, S., & Saranya, N. (2014). Self-Dual and Characterization of Partial Dual Graphs. *IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), 10*(6), 14-25.
[6] Mussafi, N. S. (2015, April). Penerapan Greedy Coloring Algorithm Pada Peta Kotamadya Yogyakarta Berbasis Four-Colour Theorem. *Kaunia, XI*(1), 19-26.
[7] Pathak, R., & Kalita, B. (2012). Properties of Some Euler Graphs Constructed from Euler Diagram. *Int. Journal of Applied Sciences and Engineering Research, I*(2), 232-237.
[8] Permana, A. B., & Darmaji. (2012). Dimensi Metrik Graf Pohon Bentuk Tertentu. *JURNAL TEKNIK POMITS, 1*(1), 1-4.
[9] Saifudin, I. (2016, Agustus). Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi dari Famili Graf Tangga. *JUSTINDO, Jurnal Sistem & Teknologi Informasi Indonesia, 1*(2), 105-112.
[10] Sulistio, W., Slamin, & Dafik. (2015, Desember). Analisis Dimensi Metrik Dengan Himpunan Pembeda Terhubung Pada Graf Khusus Keluarga Pohon Dikaitkan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi. *Kadikma, 6*(3), 26-35.
[11] Utomo, T., & Dewi, N. R. (2018, Maret). Dimensi Metrik Graf Amal (nKm). *Limits: Journal Mathematics and Its Application, 15*(1), 71-77.
[12] Yuan, W., He, K., Guan, D., & Han, G. (2017). Edge-Dual Graph Preserving Sign Prediction for Signed Social Networks. *IEEE Access, 5*, 19383-19392.