# ANALISIS GANGGUAN MATRIKS *PAIRWISE COMPARISON* TERHADAP KEKONSISTENAN KEPUTUSAN DALAM AHP

**Moh. Hafiyusholeh**
*Fakultas MIPA*
*Universitas Islam Darul Ulum Lamongan*

**Abstract:** *This paper examined pair wise comparison matrix (PC) used to construct the decision model known as the Analytic Hierarchy Process (AHP). AHP is a decision method based on diversity criteria. One of the methods used to obtain the AHP priority vectors are Eigen value method. Consistency matrix that is used is very important in supporting a valid decision. In this project, it will discuss the influence of disturbance on the consistency ratio of the matrix PC. Vector behavior will be also discussed priorities when pair wise comparison matrix interference and also subject to special review of the disorders that cause the reversal of dominance against the decision.*

**Keywords:** *Eigen value, Eigen vector, AHP, the PC matrix, the vector of priorities, the consistency ratio*

## PENDAHULUAN

Dalam fakta kehidupan, kita seringkali dihadapkan pada suatu permasalahan yang cukup kompleks, yang melibatkan banyak kriteria sebagai bahan pertimbangan dalam menentukan pilihan ataupun keputusan. Sebagai contoh, Mana yang harus kita prioritaskan antara membangun jalan, tempat olah raga, dan pusat perbelanjaan? Dalam kondisi semacam itu, adanya berbagai macam kriteria, ditambah lagi ketidakpastian atau ketidak-sempurnaan informasi seringkali menyulitkan pembuat keputusan. Oleh karena itu, salah satu solusi yang memungkinkan untuk membantu membuat keputusan adalah dengan menggunakan *Analytic Hierarchy Process* (AHP).

AHP dikembangkan oleh Thomas L. Saaty di Wharton School of Business, University of Pennsylvania pada sekitar tahun 1970-an dan baru dipublikasikan pada tahun 1980 dalam bukunya yang berjudul *Analytical Hierarchy Process*. Seiring dengan perkembangan zaman, penerapan AHP telah meluas sebagai model alternative untuk menyelasaikan bermacam-macam masalah. Hal ini dimungkinkan karena AHP cukup mengandalkan pada intuisi yang datang dari pengambil keputusan, yang cukup akan informasi dan memahami masalah keputusan yang dihadapi. Di dalam AHP, permasalahan yang kompleks dipecah menjadi beberapa unsur yang kemudian disusun berdasarkan hirarki. Menurut Saaty, definisi hirarki adalah suatu representasi dari sebuah permasalahan yang kompleks dalam suatu struktur tingkatan majemuk (multilevel) dengan tingkat pertama adalah tujuan, yang diikuti oleh ktiteria, subkriteria, dan seterusnya sampai pada tingkat terakhir.

Salah satu tahapan terpenting dalam AHP adalah penilaian tingkat perbandingan (Comparative Judgment). Prinsip ini berarti membuat penilaian tentang kepentingan relative dua elemen pada suatu tingkat tertentu dalam kaitannya dengan tingkat di atasnya yang biasa disajikan dalam bentuk matriks pairwise comparison (PC). Penilaian ini merupakan inti dari AHP karena hal tersebut akan berpengaruh terhadap prioritas masing-masing elemen. Prioritas-prioritas tersebut pada akhirnya disajikan dalam bentuk vektor yang disebut dengan vektor prioritas.

Beberapa pendekatan untuk mendapatkan vektor prioritas dari matriks PC , antara lain metode nilai eigen (*Eigenvalue Method*) [5], metode *Chi Square* [11], metode kuadrat terkecil (LSM) [6, 7] yang meminimumkan norm Frobrenius dari matriks PC dengan taksirannya. Metode lain untuk mengestimasi vektor prioritas disajikan oleh Gass dan Rapscak di [8] yaitu dengan menggunakan metode *Singular Value Decomposition* (SVD).

Matriks PC konsisten ber-rank satu akan memiliki nilai eigen yang sama dengan ukuran matriks. Pada kenyataannya, jika matriks PC tersebut dikenakan gangguan, maka akan mengubah sifat ideal dari suatu keputusan. Nilai eigen matriks tersebut berubah sebagai akibat berubahnya unsur-unsur matriks yang konsisten. Pada kondisi seperti ini, vektor eigen untuk nilai eigen terbesar oleh Thomas L. Saaty digunakan sebagai pendekatan untuk mendapatkan vektor prioritas. Vektor prioritas yang berkorespondensi dengan nilai eigen maksimal dikenal dengan istilah vector eigen utama (principal eigenvector ). Dari Teorema Perron [3] diketahui bahwa nilai eigen maksimal yang berkorespondensi dengan vektor eigen utama merupakan akar sederhana (*simple root*).

Beberapa kajian dan analisis mengenai vektor eigen utama dari matriks PC telah dilakukan diantaranya oleh Farkas [2] yang mengkonstruksi beberapa sifat PC. Astuti dan Garnadi [1] mengkaji nilai dan vektor eigen dari matriks PC yang terganggu dengan mentransformasikannya kedalam matriks 3 x 3 yang lebih fleksibel.

Berkaitan dengan penilaian tingkat perbandingan, pada tulisan ini akan ditelaah nilai dan vektor eigen matriks PC mulai dari yang transitif (konsisten) sampai pada matriks PC yang dikenakan gangguan *(perturbed*) di suatu baris dan kolom yang bersesuaian, yang selanjutnya akan dikerucutkan pada satu gangguan. Akan dikaji pula dampak dari gangguan tersebut terhadap konsistensi dari keputusan serta batasan-batasan gangguan yang diberikan sehingga sifat kekonsistensian dari suatu keputusan dapat dipertahankan.

## MATRIKS PERBANDINGAN BERPASANGAN (*PAIRWISE COMPARISON*)

Misalkan terdapat *n* obyek yang selanjutnya dinotasikan dengan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ yang akan dinilai tingkat kepentingannya dengan bobot pengaruh $w_1$, $w_2$, $w_3$, … , $w_n$. Bila diketahui nilai perbandingan elemen $A_i$ terhadap elemen $A_j$ adalah $a_{ij} = w_i/w_j$, dengan $a_{ij}$ adalah elemen dari matriks *pairwise comparison* A, jika matriks tersebut konsisten (memenuhi sifat transitif, yaitu $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$.), maka berlaku $Aw = nw$. Dengan $n$ adalah nilai eigen yang berkorespondensi dengan vektor bobot $w$. Sebelum ditelaah gangguan pada matriks PC, perhatikan matriks khusus berikut:

***Definisi 2. 1****. Sebuah matriks positif $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$ disebut matriks PC khusus, jika A bersifat transitif.*

Sebagaimana yang kita ketahui, sembarang matriks transitif $A$ dapat diekspresikan sebagai perkalian vektor kolom $U$ dan vektor baris $V^T$ yaitu $A = UV^T$, dengan $V^T = (1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ dan $U^T = \left(1, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_{n-1}}\right)$.

Selanjutnya dengan memperkenalkan matriks diagonal $D = diag\left(1, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_{n-1}}\right)$ dan vektor $e^T = (1, 1, \dots, 1)$ sehingga $D^{-1}AD = ee^T$, suku banyak karakteristik dari $A$, yaitu $P_n(\lambda)$ adalah

$$\begin{aligned} P_n(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A) \\ &= \det\left(D\left[\lambda I_n - ee^T\right]D^{-1}\right), \quad (2.1) \\ &= \det\left(\lambda I_n - ee^T\right) \end{aligned}$$

dengan $I_n$ adalah matriks identitas berorde $n$. Secara rekursif, akan diperoleh

$$\begin{aligned} P_n(\lambda) &= \lambda^n - n\lambda^{n-1} \\ &= \lambda^{n-1}(\lambda - n) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Pembuktian di atas dapat dilakukan dengan induksi matematika. Dari persamaan (2.2) $A$ mempunyai nilai karakteristik nol dengan multiplisitas $n$-1 dan satu nilai eigen sederhana yaitu $\lambda = n$.

Pada kondisi tersebut, matriks PC yang digunakan akan konsisten. Karena pada kehidupan sehari-hari kondisi ideal tersebut jarang terjadi, maka Thomas L. Saaty merumuskan kriteria kekonsistenan dengan melihat random konsistensi ($CR = \frac{CI}{RI}$) yang dibatasi kurang dari atau sama dengan sepuluh persen.

## MATRIKS PAIRWISE COMPARISON YANG DIKENAI GANGGUAN

Pada pembahasan matriks PC ini, kita akan membatasinya pada satu pasangan gangguan saja, yang selanjutnya kita definisikan sebagai berikut;

***Definisi 3.1****. Matriks PC khusus disebut terganggu sederhana, yang dinotasikan dengan $A_s$, jika satu pasangan unsur $a_{12}$ dan $a_{21}$ dari matriks $A_s$ mempunyai bentuk $a_{12} = x_1\delta$, $a_{21} = 1/x_1\delta$ dengan $\delta > 0, \delta \neq 1$.*

Dalam kasus khusus ini, matriks terganggu sederhana $A_s$ dapat ditulis sebagai

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & x_1\delta_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ \frac{1}{x_1\delta_1} & 1 & \frac{x_2}{x_1} & \cdots & \frac{x_{n-1}}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} & \frac{x_1}{x_2} & 1 & \cdots & \frac{x_{n-1}}{x_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1}} & \frac{x_1}{x_{n-1}} & \frac{x_2}{x_{n-1}} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Dengan melakukan transformasi yang bersesuaian, polinomial karakteristik dari $A_{s,}$ $P_n^s(\lambda)$ dapat ditulis sebagai

$$P^s_n(\lambda) = \det(\lambda I_n - A_s)$$
$$= \det(\lambda I_n - D^{-1} A_s D)$$
$$= \det K_s(\lambda)$$

dengan

$$\det K_s(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1-\delta & -1 & \cdots & -1 \\ 1-\frac{1}{\delta} & \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

Matriks $K_s(\lambda) = \lambda I_n - D^{-1}A_s D$ dapat di interpretasikan sebagai matriks termodifikasi

$$K_s(\lambda) = \lambda I_n + U_s V_s^T - ee^T.$$

Dengan

$$U_s^T = \begin{pmatrix} 0 & 1-\frac{1}{\delta} & 0 \ldots 0 \\ 1 & 0 & 0 \ldots 0 \end{pmatrix}$$

dan

$$V_s^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1-\delta & 0 \ldots 0 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya dengan memisalkan

$$T_s(\lambda) = \lambda I_n + U_s V_s^T$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda & 1-\delta & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{1-\delta} & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

matriks modifikasi $K_s(\lambda)$ dapat ditulis sebagai

$$K_s(\lambda) = T_s(\lambda) - ee^T.$$

Dengan demikian suku banyak karakteristik $P_n^s(\lambda) = \det K_s(\lambda)$ akan memenuhi;

(3.2)

$$\det K_s(\lambda) = \det\left(T_s(\lambda) - ee^T\right)$$
$$= \det\left(T_s(\lambda)\left[I_n - (T_s(\lambda))^{-1} ee^T\right]\right)$$

(3.4)

Dengan

$$(T_s(\lambda))^{-1} = \frac{1}{\lambda} I_n - \frac{1}{\lambda} U_s \left(\lambda I_2 + V_s^T U_s\right)^{-1} V_s^T$$

dan

$$\left(\lambda I_2 + V_s^T U_s\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda^2 - (1-\delta)\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)} G$$

Dengan

$$G = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -(1-\delta)\left(1-\frac{1}{\delta}\right) & \lambda \end{pmatrix}$$

Selanjutnya dengan memperhatikan bahwa

$\det(I_n + A_{nxm} B_{mxn}) =$

$\det(I_m + B_{mxn}A_{nxm})$
diperoleh

$$\det K_s(\lambda) = \lambda^{n-2}\left\{\left[\lambda^2 - (1-\lambda)\left(1-\frac{1}{\delta}\right)\right]\left(\frac{\lambda-n}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(\lambda\left[(1-\delta)+\left(1-\frac{1}{\delta}\right)\right] - (1-\delta)\left(1-\frac{1}{\delta}\right) - \left(1-\frac{1}{\delta}\right)(1-\delta)\right)\right\}$$

Selanjutnya dengan memperhatikan bahwa

$$(1-\delta)(1-1/\delta) = 1-\delta+1-(1/\delta),$$

didapat

$$P_n^s(\lambda) = \det K_s(\lambda) = \lambda^{n-3}\left(\lambda^3 - n\lambda^2 - C_s\right) \quad (3.5)$$

Dengan

$$C_s = -(n-2)(1-\delta)\left(1-\frac{1}{\delta}\right) = (n-2)Q$$

dengan Q adalah fungsi faktor terganggu δ

$$Q = \delta + \frac{1}{\delta} - 2,\ \delta > 0,\ \delta \neq 1 \quad (3.6)$$

***Teorema 3.1**. Misalkan $A_s \in M_n(C)$ adalah matriks terganggu sederhana. Matriks tersebut konsisten jika gangguan $\delta$ yang diberikan memenuhi*

$$m \leq \delta \leq \frac{2+0.1n^2 RI + n\sqrt{(0.4+0.01n^2 RI) RI}}{2}.$$

*Dengan*

$$m = \frac{2+0.1n^2 RI - n\sqrt{(0.4+0.01n^2 RI) RI}}{2}$$

*dan*

*RI adalah random indeks yang berkorespondensi dengan ukuran matriks, $n, n \geq 3$.*

**Bukti.**

Pandang matriks terganggu $A_s$.

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & x_1\delta_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ \frac{1}{x_1\delta_1} & 1 & \frac{x_2}{x_1} & \cdots & \frac{x_{n-1}}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} & \frac{x_1}{x_2} & 1 & \cdots & \frac{x_{n-1}}{x_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1}} & \frac{x_1}{x_{n-1}} & \frac{x_2}{x_{n-1}} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Misalkan $r$ adalah nilai karakteristik terbesar dari $A_s$, nilai karakteristik $r$ dapat diperoleh dari persamaan (3.5), yaitu:

$$r^3 - nr^2 - (n-2)Q = 0 \quad (3.7)$$

Selanjutnya dengan memanfaatkan konsep kalkulus, jelas diperoleh $r > n$. Untuk mendapatkan batas bawah dan batas atas, pandang persamaan (3.7) sebagai

$$f(r) = r3 - nr2 - (n-2)Q$$

yang selanjutnya cari turunan pertama dan kedua sehingga diperole batas bawah dan batas atas $r$ sebagai berikut

$$n < r < n + \frac{(n-2)}{n^2}Q$$

Dengan memeperhatikan indeks konsistensi $CI = \frac{r-1}{n-1}$ , dan $CR = \frac{CI}{RI}$ didapatkan hubungan sebagai berikut

$$0 < CI < \frac{(n-2)Q}{n^2(n-1)}$$

yaitu,

$$\frac{CI}{RI} < \frac{(n-2)Q}{n^2(n-1)} \le \frac{Q}{n^2 RI}.$$

Untuk menjamin agar keputusan yang ditetapkan bersifat konsisten, $CR \le 0.1$. Dengan demikian $Q \le 0.1n^2 RI$, lebih lanjut karena $Q = \delta + \frac{1}{\delta} - 2$, diperoleh

$$\delta^2 - (2 + 0.1n^2 RI)\delta + 1 \le 0$$

Selanjutnya dengan menggunakan rumus ABC untuk mendapatkan akar-akar penyelesaian dan dengan menguji daerah penyelesaiannya akan diperoleh

$$m \le \delta \le \frac{2 + 0.1n^2 RI + n\sqrt{(0.4 + 0.01n^2 RI)RI}}{2}$$

dengan

$$m = \frac{2+0.1n^2 RI - n\sqrt{(0.4+0.01n^2 RI)RI}}{2}$$

Bukti selesai ■

Adapun selang interval untuk gangguan $\delta$ sehingga tidak merubah konsistensi matriks PC dapat kita sajikan sebagai berikut

**Tabel 1 Selang Interval untuk $\delta$ dengan $RI \le 0.1$**

| $n$ | $RI$ | Selang interval untuk $\delta$ dengan $RI \le 0.1$ |
|---|---|---|
| 3 | 0.58 | (0.493, 2.029) |
| 4 | 0.90 | (0.321, 3.119) |
| 5 | 1.12 | (0.218, 4.582) |
| 6 | 1.24 | (0.159, 6.305) |
| 7 | 1.32 | (0.120, 8.348) |
| 8 | 1.41 | (0.091, 10.93) |
| 9 | 1.45 | (0.073, 13.67) |
| 10 | 1.49 | (0.059, 16.84) |
| 11 | 1.51 | (0.049, 20.22) |

Dari table tersebut, untuk mendapatkan matriks yang konsisten, gangguan yang diberikan tidak boleh terlalu jauh melebihi batas selang yang telah diberikan.

## SIMPULAN

Pada matriks PC transitif, nilai karakteristik terbesar $r$ akan sama dengan $n$. Pada kasus ini indeks konsistensinya sama dengan nol. Jika dikenakan gangguan $\delta \neq 1$ pada satu pasangan unsur baris pertama dan kolom yang bersesuaian, maka akan berpengaruh terhadap nilai karakteristik dan sifat-sifat yang melekat pada matriks PC yang konsisten. Nilai karakteristik terbesar dari matriks PC terganggu diperoleh dari $r^3 - nr^2 - (n - 2)Q = 0$. Pada kondisi ini indeks konsistensi matriks memenuhi

$$0 < CI < \frac{(n-2)Q}{n^2(n-1)}.$$

Untuk menjaga agar keputusan yang diambil tetap konsisten, kondisi yang cukup untuk $\delta$ sebagai gangguan terhadap matriks PC adalah

$$m \le \delta \le \frac{2 + 0.1n^2 RI + n\sqrt{(0.4 + 0.01n^2 RI)RI}}{2}.$$

dengan

$$m = \frac{2+0.1n^2 RI - n\sqrt{(0.4+0.01n^2 RI)RI}}{2}$$

## DAFTAR RUJUKAN

Pudji Astuti, Agah D. Garnadi. 2008. *On Eigenvalues and eigenvectors of perturbed pairwise comparison matrices*, Fundamental Research Grant 2008.

Andr´as Farkas. 2007. *The analysis of the principal eigenvector of pairwise comparison matrices,* Acta Polytechnica Hungarica 4.

A. Horn., A. J., Charles. 1985. *Matrix analysis*, Cambridge University Press.

R. Fletcher, D. Sorensen. 1983. *An algorithmic derivation of the jordan canonical form*, Amer. Math. Montly 90 pp (1983) 12-16.

Saaty, T.L. 1980. *Decision making for leaders*, University of Pittsburg.

Baz´oki, S. 2003. *A method for solving LSM problems of small size in AHP*, Central European Journal of Operations Research 11 pp (2003) 17-33.

Baz´oki, S. 2008. *Solution of the least square method problem of pairwise comparison matrices*, Central European Journal of Operations Research.

Gass, S.I., Rapcs´ak, T. 2004. *Singular value decomposition in AHP*, European Journal of Operations Research 154 (2004) 573-584.

Saaty, T.L. 1988. *The analytic hierarchy process*, University of Pittsburgh.

Saaty, T.L. 2002. *Decision-making with the AHP: Why is principal eigenvector necessary*, EJOR 145 (2002) 85-91.

Xu, Z.S. 2000. *Generalized chi square method for the estimation of weights*, JOTA 183 pp (2000) 183-192.