

# METODE ADI (ALTERNATING DIRECT IMPLICIT) PADA PENYELESAIAN MODEL ALIRAN AIR TANAH

Mohammad Syaiful Pradana<sup>1</sup>, Lutvia Muniroh<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universitas Islam Darul Ulum Lamongan, gomasyai@gmail.com

<sup>2</sup>Universitas Islam Darul Ulum Lamongan, lutviamuniroh@gmail.com

**Abstract.** The flow of water beneath the earth's surface flows through the pores like rocks and other porous media that can be flooded by water. In the soil, water flows due to the difference in hydraulic height that is the difference from ground water level. Groundwater movement, generally moving water with relatively slow flow can be modeled using Darcy law and mass conservation laws. The model is approximated numerically using the Finite Difference Method with the ADI (Alternating Direct Implicit) scheme. The ADI method has an advantage in the accuracy or accuracy of the results and the speed of completion. The ADI method can be applied to two or three dimensional systems to obtain the tridiagonal coefficient matrix.

**Key Words:** *Groundwater Flow, Alternating Direct Implicit*

**Abstrak.** Aliran air di bawah permukaan bumi mengalir melalui pori-pori seperti batuan dan media berpori lain yang dapat dialiri oleh air. Di dalam tanah, air mengalir dikarenakan adanya perbedaan tinggi hidraulik yaitu perbedaan dari elevasi muka air tanah. Pergerakan air dalam tanah, pada umumnya air bergerak dengan aliran relatif lambat dapat dimodelkan dengan menggunakan hukum Darcy dan hukum konservasi massa. Selanjutnya model didekati secara numerik menggunakan metode beda hingga (*finite difference method*) dengan skema ADI (*Alternating Direct Implicit*). Metode ADI mempunyai keunggulan dalam akurasi atau ketepatan hasil dan kecepatan penyelesaian. Metode ADI dapat diterapkan untuk sistem dua atau tiga dimensi untuk mendapatkan matriks koefisien tridiagonal.

**Kata Kunci:** *Aliran Air tanah, Alternating Direct Implicit*

## 1 Pendahuluan

Seluruh makhluk hidup di dunia sangat bergantung terhadap air. Setiap hari manusia menggunakan air untuk berbagai keperluan, seperti kebutuhan rumah tangga, pertanian, peternakan, industri dan keperluan lainnya. Pertumbuhan populasi manusia yang semakin meningkat memberikan dampak kepada persediaan air bersih yang bersifat terbatas. Sebagai salah satu sumber air bersih, air tanah dapat menjadi alternatif manusia untuk memenuhi kebutuhan air dalam kehidupannya. Terdapat sejumlah air di bawah permukaan bumi yang dapat dikumpulkan dengan sumur-sumur atau pemompaan yang dikenal dengan air tanah.

Aliran air dibawah permukaan bumi tersebut mengalir melalui pori-pori seperti batuan dan media berpori lain yang dapat dialiri oleh air. Air dalam tanah mengalir dikarenakan adanya perbedaan tinggi hidraulik yaitu perbedaan dari elevasi muka air tanah. Pergerakan air dalam tanah merupakan bagian dari siklus hidrologi. Pergerakan air dalam tanah, pada umumnya air bergerak dengan aliran relatif lambat atau dalam kondisi laminar dapat dianalisa dengan menggunakan hukum *Darcy*. Pemodelan matematika untuk aliran air dalam tanah diperoleh dengan menggabungkan persamaan dari *Darcy's Law* dengan hukum-hukum konservasi massa dan momentum.

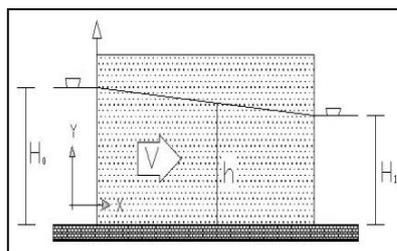
Untuk menentukan potensi sumber daya dan dampak dimasa depan akibat perubahan kondisi lingkungan melalui parameter-parameter akuifer dapat didekati secara numerik menggunakan metode beda hingga dengan skema *ADI* (*Alternating Direct Implicit*). Metode *ADI* mempunyai keunggulan dalam akurasi atau ketepatan hasil dan kecepatan penyelesaian. Sistem persamaan untuk kasus satu dimensi selalu memiliki matriks koefisien tridiagonal yang secara efisien dapat menggunakan algoritma Thomas. Metode *ADI* dapat diterapkan untuk sistem dua atau tiga dimensi untuk mendapatkan matriks koefisien tridiagonal.

## 2 Kajian Teori

### 2.1 Aliran Air Tanah

Aliran air dalam tanah secara umum bergerak dari daerah imbuhan (*recharge area*) ke daerah luah (*discharge area*) dan dapat muncul ke permukaan secara alami maupun buatan (Usmar dan Hakin, 2006). Pergerakan air tanah terjadi mulai dari masuknya air dalam tanah (*recharge area*), bergerak menuju keluarnya air tanah dalam bentuk mata air, rembesan atau limpasan pada sumur (*discharge area*).

Data yang didapatkan pada paper ini berasal dari aliran air tanah tanpa *discharge*. Aliran air tanah pada aliran ini adalah air tanah mengalir satu arah ke arah  $x$  dan tidak ada aliran ke arah  $y$ , seperti yang terlihat pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Aliran Air Tanah Tanpa *Discharge*.

Pada akuifer ini tinggi air tanah dapat di hitung dengan :

$$h^2 = H_0^2 + \frac{(H_1^2 - H_0^2)x}{L} \quad (1)$$

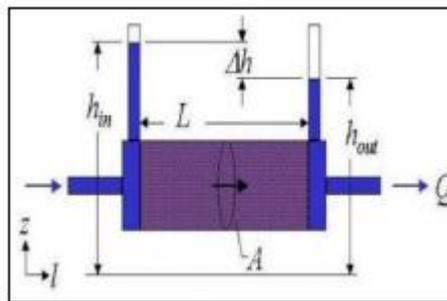
Dengan  $H_0$  merupakan tinggi permukaan air tertinggi,  $H_1$  merupakan tinggi permukaan air terendah,  $h$  merupakan tinggi air tanah yang ditinjau,  $x$  merupakan jarak dari titik yang ditinjau terhadap  $H_0$  dan  $L$  merupakan jarak  $H_1$  dan  $H_0$ .

## 2.2 Hukum Darcy

Hukum *Darcy* merupakan persamaan yang mendefinisikan kemampuan suatu fluida mengalir melalui media berpori seperti batu. Jumlah aliran antara dua titik secara langsung berkaitan dengan perbedaan tekanan antara titik-titik, jarak antara titik-titik, dan interkoneksi jalur aliran dalam batuan antara titik-titik. Pengukuran interkoneksi disebut permeabilitas. Hukum *Darcy* ditulis sebagai:

$$Q = -KA \frac{dh}{dl} \quad (2)$$

Dengan  $Q$  merupakan laju aliran air (volume per waktu),  $K$  merupakan koefisien tak berdimensi,  $\frac{dh}{dl}$  merupakan gradien hidrolik dan  $A$  merupakan luas penampang lintang. Gambaran Hukum *Darcy* ditunjukkan pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Hukum Darcy

Hukum *Darcy* direferensikan untuk campuran sistem unit. Sebuah medium dengan permeabilitas 1 *Darcy* memungkinkan aliran  $1\text{cm}^3/\text{s}$  dari cairan dengan viskositas 1 cP (1 Mpa·s) di bawah gradien tekanan  $1\text{atm}/\text{cm}$  di seluruh luas  $1\text{cm}^2$ .

## 2.3 Hukum Kekekalan Massa

Menurut Apsley (2005) hukum kekekalan massa adalah perubahan rata-rata massa di dalam volume kendali ditambah dengan arus massa yang keluar melalui permukaan kendali sama dengan banyaknya massa yang diciptakan dari sumbernya atau yang hilang, dapat dituliskan pada persamaan (3) berikut.

$$\frac{d}{dt}(\text{Massa}) + \text{aliran massa keluar} = \text{sumber massa} \quad (3)$$

Maka persamaan (3) dapat ditulis dalam bentuk

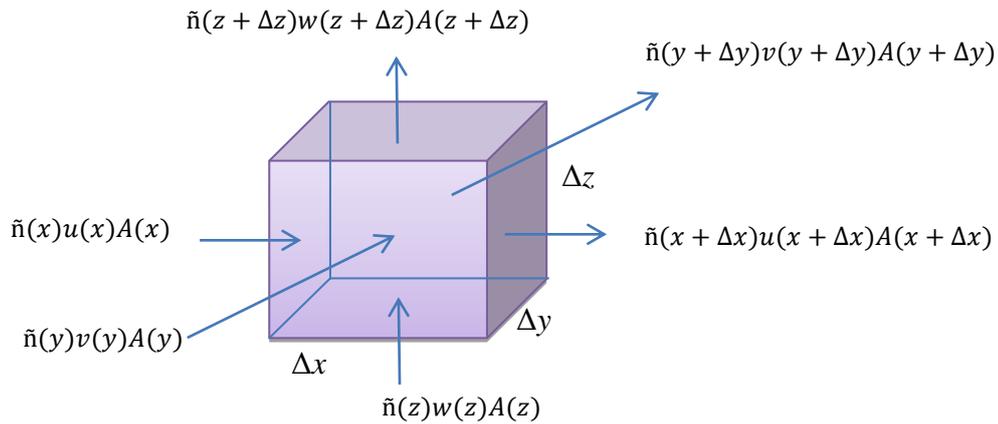
$$\frac{d}{dt}(\rho V) + \sum_{\text{Faces}} \rho u A = S \quad (4)$$

dengan  $\rho V$  merupakan massa,  $\rho u A$  merupakan aliran massa yang keluar melalui permukaan kendali,  $\rho$  merupakan massa jenis,  $V$  merupakan volume,  $u$  merupakan kecepatan dan  $A$  merupakan luas permukaan. Menurut teorema pengangkutan Reynold (Apsley, 2005), persamaan (4) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{d}{dt}(\rho V) + (\rho u A)_{\text{out}} - (\rho u A)_{\text{in}} = S \quad (5)$$

### 3 Hasil dan Pembahasan

Model aliran air tanah didapatkan dengan menurunkan persamaan kekekalan massa yang meliputi aliran masuk (*inflow*), keluar (*outflow*) dan perubahan penampungan air tanah. Menurut prinsip kontinum hukum kekekalan massa disebutkan bahwa aliran massa yang masuk dikurangi dengan aliran massa yang keluar sama dengan jumlah massa yang disimpan.



**Gambar 3.** Volume kendali aliran massa

Jika volume kendali pada Gambar 3 diperbesar dan digambarkan arah aliran massanya dari permukaan yang berjarak  $\Delta x$  dari pusat elemen dinyatakan berturut-turut sebagai  $\rho(x)u(x)A(x)$  dan  $\rho(x + \Delta x)u(x + \Delta x)A(x + \Delta x)$ , maka dari hukum kekekalan massa dapat dijabarkan menjadi

$$\begin{aligned} & ((\rho(x)u(x)A(x))_e - (\rho(x + \Delta x)u(x + \Delta x)A(x + \Delta x))_w)\Delta t + \\ & ((\rho(y)v(y)A(y))_n - (\rho(y + \Delta y)v(y + \Delta y)A(y + \Delta y))_s)\Delta t + \\ & ((\rho(z)w(z)A(z))_t - (\rho(z + \Delta z)w(z + \Delta z)A(z + \Delta z))_b)\Delta t = -(m(t + \Delta t) - m(t)). \end{aligned} \quad (8)$$

Karena  $A(x)_e = A(x + \Delta x)_w = \Delta y \Delta z$ ,  $A(y)_n = A(y + \Delta y)_s = \Delta x \Delta z$ , dan  $A(z)_t = A(z + \Delta z)_b = \Delta x \Delta y$ , dan membagi persamaan dengan  $\Delta t$ , maka Persamaan (8) dapat ditulis

$$\begin{aligned} & (\rho u(x) - \rho u(x + \Delta x)) \Delta y \Delta z + (\rho v(y) - \rho v(y + \Delta y)) \Delta x \Delta z + (\rho w(z) - \\ & \rho w(z + \Delta z)) \Delta x \Delta y = - \left( \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Dengan mengambil limit  $\Delta t \rightarrow 0$  di ruas kanan, maka Persamaan (9) menjadi

$$\begin{aligned} & (\rho u(x) - \rho u(x + \Delta x)) \Delta y \Delta z + (\rho v(y) - \rho v(y + \Delta y)) \Delta x \Delta z + (\rho w(z) - \\ & \rho w(z + \Delta z)) \Delta x \Delta y = - \frac{\partial m}{\partial t}. \end{aligned} \quad (10)$$

Karena  $m = \rho V_p$ , dan  $V_p = nV$  adalah volume pori yang terdapat pada irisan  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , dan  $\Delta z$ , maka:  $m = \rho V_p = \rho nV = \rho n \Delta x \Delta y \Delta z$ . Dengan demikian, Persamaan (10) ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} & (\rho u(x) - \rho u(x + \Delta x)) \Delta y \Delta z + (\rho v(y) - \rho v(y + \Delta y)) \Delta x \Delta z + (\rho w(z) - \\ & \rho w(z + \Delta z)) \Delta x \Delta y = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho n) \Delta x \Delta y \Delta z. \end{aligned} \quad (11)$$

Jika Persamaan (11) dibagi dengan  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , maka di peroleh

$$-\frac{(\rho u(x+\Delta x) - \rho u(x))}{\Delta x} - \frac{(\rho v(y+\Delta y) - \rho v(y))}{\Delta y} - \frac{(\rho w(z+\Delta z) - \rho w(z))}{\Delta z} = -\frac{\partial}{\partial t}(\rho n). \quad (12)$$

Dengan mengambil limit  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$  pada ruas kiri, maka persamaan (12) dapat ditulis menjadi

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho n). \quad (13)$$

dengan  $\rho$  merupakan massa jenis fluida,  $u$  merupakan laju aliran fluida arah longitudinal,  $v$  merupakan laju aliran fluida arah lateral dan  $w$  merupakan laju aliran fluida arah vertikal dan  $n$  porositas dari medium. Karena  $\rho$  konstan dan akan dilihat dalam arah longitudinal dan lateral, maka diperoleh persamaan (14) berikut.

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v = \frac{\partial}{\partial t}n \quad (14)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan Darcy, maka persamaan pengatur (14) aliran air tanah menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) = S_s \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad (15)$$

Dengan  $k_x$  merupakan konduktivitas hidrolik pada arah longitudinal,  $k_y$  merupakan konduktivitas hidrolik pada arah lateral,  $h$  merupakan tinggi muka air tanah, dan  $S_s$  merupakan *specific storage*. Pada akuifer tertekan yang homogen dan isotropis, yaitu nilai  $k$  bukan sebagai fungsi dari arah aliran didapatkan persamaan (16) berikut.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{S_s} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \quad (16)$$

Agar dapat disimulasikan tanpa bergantung dengan dimensi/satuan, maka persamaan tersebut harus dibentuk ke dalam persamaan tanpa dimensi. Adapun variabel tanpa dimensi yang diperkenalkan dijelaskan pada Tabel 1 berikut.

**Tabel 1.** Variabel tanpa dimensi

$x = L_0 x^*$	$y = L_0 y^*$
$h = L_0 h^*$	$t = \frac{L_0}{U_0} t^*$
$S_s = \frac{1}{L_0} S_s^*$	$k = \frac{L_0}{U_0} k^*$

Dengan  $x^*, y^*, h^*, t^*, S_s^*$  dan  $k^*$  adalah variabel tanpa dimensi,  $L_0, U_0$  adalah parameter-parameter variabel tanpa dimensi dan mensubstitusikan  $C = \frac{L_0 k}{U_0 S_s}$  didapatkan bentuk persamaan tanpa dimensi (*non-dimensional equation*) berikut

$$\frac{\partial h}{\partial t} = C \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \quad (17)$$

Persamaan (17) selanjutnya diselesaikan menggunakan metode beda hingga dengan skema ADI (*alternating direct Implicit*) diperoleh persamaan (18) berikut.

$$\frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} = C \left( \frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \quad (18)$$

Karena  $\Delta x = \Delta y = d$  dan dengan mensubstitusikan  $r = \frac{C\Delta t}{d^2}$  maka persamaan (18) ditulis menjadi

$$h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n = r(h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n + h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n) \quad (19)$$

Setiap iterasi memiliki prosedur dua langkah, dengan langkah pertama maju ke tingkat  $(n + \frac{1}{2})$  dan langkah kedua dengan tingkat  $(n + 1)$ . Langkah pertama dari persamaan (19) yang dibentuk menjadi

$$h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - h_{i,j}^n = r \left( h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n + h_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - 2h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + h_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (20)$$

Sedangkan langkah kedua dari persamaan (19) dibentuk menjadi

$$h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = r \left( h_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + h_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + h_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + h_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (21)$$

Metode ADI menghasilkan satu set tridiagonal persamaan di tingkat  $(n + \frac{1}{2})$ . Persamaan dapat diselesaikan bersama baris dari grid, satu baris pada satu waktu. Pertama, semua node telah diangkat ke tingkat  $(n + \frac{1}{2})$ , prosedur yang sama diterapkan untuk kolom dari node. Selanjutnya, iterasi dikatakan selesai ketika nilai-nilai baru  $h_{i,j}^{n+1}$  telah dihitung.

Pengamatan langsung dilakukan untuk mendapatkan data ketinggian akuifer air tanah berada pada 3 lokasi pengamatan yang berbeda di desa primpen kecamatan bluluk kabupaten Lamongan didapatkan data sebagai berikut.

**Tabel 2.** Ketinggian akuifer

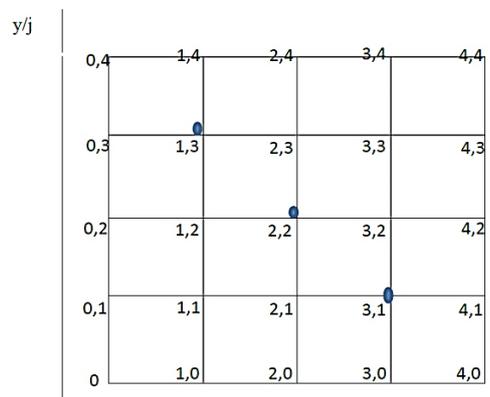
Lokasi	Titik	Ketinggian Akuifer (m)
1	$h_{1,3}$	5
2	$h_{2,2}$	10
3	$h_{3,1}$	8

Gambaran dari peta google maps dengan skala 1:10.000 didapatkan detail lokasi sebagai berikut.



**Gambar 4.** Lokasi pengambilan data

Dari gambar diatas diketahui luas area pengamatan  $157.345,56 \text{ m}^2$ , total keliling  $1,6 \text{ km}$  dengan panjang lintasan setiap sisi adalah  $400 \text{ m}$ . Diasumsikan bahwa jarak antara titik pada grid sama, maka akan dibuat grid dengan panjang sisi setiap grid adalah  $100 \text{ m}$  Seperti ditunjukkan pada gambar berikut.



**Gambar 5.** Grid dengan titik

Berdasarkan tabel 2 bahwa titik akuifer yang diketahui adalah  $h_{1,3}$ ,  $h_{2,2}$ , dan  $h_{3,1}$  maka untuk titik akuifer yang lain sebagai *initial guess* diprediksi dengan menggunakan persamaan (1) karena aliran air yang diamati adalah aliran air tanah tanpa *discharge*. Sehingga didapatkan hasil prediksi *initial guess* titik akuifer selain titik pengamatan sebagai berikut.

**Tabel 3.** Ketinggian akuifer seluruh titik grid

Lokasi	Hasil pengukuran berdasarkan aliran tanpa discharge		Kondisi batas
$h_{1,3} = 5$	$h_{1,1} = 6,03$	$h_{1,2} = 5,53$	$h_{0,1} - h_{0,4} = 6,03$
$h_{2,2} = 10$	$h_{2,1} = 8,63$	$h_{2,3} = 6,85$	$h_{1,0} - h_{4,0} = 8,63$
$h_{3,1} = 8$	$h_{3,3} = 6,03$	$h_{3,2} = 7,08$	$h_{1,4} - h_{4,4} = 6,85$

	$h_{4,1} - h_{44} = 8$
--	------------------------

Selanjutnya dengan menggunakan skema ADI pada langkah pertama didapatkan nilai untuk  $h_{1,1}^{n+\frac{1}{2}}$  sampai  $h_{3,3}^{n+\frac{1}{2}}$  ditunjukkan pada Tabel 4 berikut.

**Tabel 4.** Hasil langkah pertama untuk  $h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$

$h_{1,1}^{n+\frac{1}{2}} = 6,81$	$h_{1,2}^{n+\frac{1}{2}} = 3,18$	$h_{1,3}^{n+\frac{1}{2}} = 5,85$
$h_{2,1}^{n+\frac{1}{2}} = 4,71$	$h_{2,2}^{n+\frac{1}{2}} = 6,25$	$h_{2,3}^{n+\frac{1}{2}} = 5,27$
$h_{3,1}^{n+\frac{1}{2}} = 7,03$	$h_{3,2}^{n+\frac{1}{2}} = 3,82$	$h_{3,3}^{n+\frac{1}{2}} = 6,49$

Setelah  $n$  iterasi pada langkah kedua didapatkan nilai perubahan ketinggian akuifer air tanah untuk  $h_{1,1}^{n+1}$  sampai  $h_{3,3}^{n+1}$  yang ditunjukkan pada Tabel 5 berikut.

**Tabel 5.** Hasil langkah kedua untuk  $h_{i,j}^{n+1}$

$h_{1,1}^{n+1} = 6,77$	$h_{1,2}^{n+1} = 7,28$	$h_{1,3}^{n+1} = 5,59$
$h_{2,1}^{n+1} = 8,03$	$h_{2,2}^{n+1} = 6,34$	$h_{2,3}^{n+1} = 6,55$
$h_{3,1}^{n+1} = 7,15$	$h_{3,2}^{n+1} = 8,01$	$h_{3,3}^{n+1} = 6,24$

#### 4. Kesimpulan

Model aliran air tanah didapatkan  $\frac{\partial h}{\partial t} = C \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right)$  dengan  $h$  adalah ketinggian akuifer nilai awal pada titik grid  $(1,3) = 5$ ,  $(2,2) = 10$  dan  $(3,1) = 8$  dan dengan nilai batas  $h_{0,1} - h_{0,4} = 6,03$ ;  $h_{1,0} - h_{4,0} = 8,63$ ;  $h_{1,4} - h_{4,4} = 6,85$  dan  $h_{4,1} - h_{44} = 8$  setelah  $n$  iterasi didapatkan hasil perubahan ketinggian akuifer untuk titik grid  $h_{1,1} = 6,77$ ;  $h_{2,1} = 8,03$ ;  $h_{3,1} = 7,15$ ;  $h_{1,2} = 7,28$ ;  $h_{2,2} = 6,34$ ;  $h_{3,2} = 8,01$ ;  $h_{1,3} = 5,59$ ;  $h_{2,3} = 6,55$ ; dan  $h_{3,3} = 6,24$ .

#### Daftar Pustaka

- [1] Usmar, H. dan Hakim R.T. 2006. *Pemanfaatan Air Tanah untuk Keperluan Air Baku Industri di Wilayah Kota Semarang Bawah*. Undip. Semarang.
- [2] Darcy H. (1856). "Les fontaines publiques de la ville de Dijon". Dalmont. Paris
- [3] Apsley, D. (2005). "Computational Fluid Dynamic". Springer. New York.