

KAJIAN KESULITAN BELAJAR MAHASISWA DALAM KEMAMPUAN PEMBUKTIAN MATEMATIS DITINJAU DARI ASPEK EPISTEMOLOGI PADA MATA KULIAH GEOMETRI TRANSFORMASI

Mohammad Dadan Sundawan^a, Irmawati Liliana Kusuma Dewi^b, Muchamad Subali Noto^c

^a Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Swadaya Gunung Djati, Cirebon
Jl. Perjuangan No. 1 Cirebon, mohammaddadansundawan@unswagati.ac.id

^b Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Swadaya Gunung Djati, Cirebon
Jl. Perjuangan No. 1 Cirebon, muchamadsubalinoto@unswagati.ac.id

^c Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Swadaya Gunung Djati, Cirebon
Jl. Perjuangan No. 1 Cirebon, irmawatililianakd@unswagati.ac.id

ABSTRAK

Penelitian ini secara khusus bertujuan menganalisis kemampuan pembuktian matematis, untuk menganalisis kesulitan belajar ditinjau dari epistemologi mahasiswa pada materi geometri transformasi. Manfaat jangka panjang penelitian ini adalah dengan adanya kajian kesulitan belajar ditinjau dari epistemologi mahasiswa terkait pembuktian matematis pada matakuliah geometri transformasi, diharapkan dapat memberikan dorongan kepada dosen pengampu lainnya untuk lebih mengembangkan proses pembelajaran ataupun bahan ajar dalam upaya mengembangkan kemampuan pembuktian matematis mahasiswa pendidikan matematika. Penelitian ini menggunakan metode deskriptif, sedangkan subjek penelitian adalah 9 mahasiswa calon guru matematika Unswagati yang mengontrak mata kuliah geometri transformasi. Metode pengumpulan data yang digunakan meliputi: (1) tes kemampuan pembuktian matematis; (2) observasi; (3) wawancara; dan (4) dokumentasi. Hasil penelitian diperoleh terdapat 5 macam kesulitan mahasiswa ditinjau dari epistemologi terkait mata kuliah geometri transformasi, yaitu a) kesulitan belajar terkait kesulitan dalam menerapkan konsep; b) kesulitan belajar terkait memvisualisasi objek geometri; c) kesulitan belajar terkait kesulitan menentukan prinsip; d) kesulitan belajar terkait memahami masalah dan e) terkait kesulitan dalam pembuktian matematis. Khusus dalam pembuktian matematis, mahasiswa mengalami kesulitan antara lain: tidak tahu bagaimana memulai konstruksi bukti, tidak dapat menggunakan definisi (konsep) dan prinsip yang sudah diketahui, dan cenderung memulai konstruksi bukti dengan apa yang harus dibuktikan.

Kata Kunci: pembuktian matematis, kesulitan belajar, dan geometri transformasi.

ABSTRACT

This research specifically aims to analyze the ability of mathematical proof, to analyze learning difficulties in terms of student epistemology on the material of transformation geometry. The long-term benefit of this study is the study of learning difficulties in terms of student epistemology related to mathematical proofing in the course of transformation geometry, is expected to provide encouragement to other lecturers to further develop the learning process or teaching materials in an effort to develop mathematical proof of mathematics students. This research uses descriptive method, while the subject of research is 9 students of Unswagati mathematics teacher candidate who contracted

the course of transformation geometry. Methods of data collection used include: (1) test of mathematical proof capability; (2) observation; (3) interviews; and (4) documentation. The research results obtained there are 5 kinds of student difficulties viewed from epistemology related to the geology of transformation geometry, namely a) difficulty learning related difficulties in applying the concept; b) learning difficulties related to visualizing geometric objects; c) learning difficulties with difficulty in determining principles; d) learning difficulties related to understanding problems and e) related difficulties in mathematical proofing. Especially in mathematical proofing, students have difficulties such as: not knowing how to start construction of evidence, unable to use known concepts and principles, and tend to start construction of evidence with what must be proven.

Keywords: mathematical proof, learning difficulties, and transformation geometry.

PENDAHULUAN

Geometri merupakan bagian yang tak terpisahkan dalam pembelajaran matematika. Akan tetapi, perkembangan geometri pada pembelajaran geometri saat ini kurang berkembang. Salah satu penyebabnya adalah kesulitan mahasiswa dalam membentuk konstruksi nyata secara teliti dan akurat, adanya anggapan bahwa untuk melukis bangun geometri memerlukan ketelitian dalam pengukuran dan memerlukan waktu yang lama, serta tidak jarang mahasiswa mengalami kesulitan dalam proses pembuktian. Sementara itu, melukis memainkan peranan yang penting dalam pembelajaran geometri di sekolah karena lukisan geometri menghubungkan antara ruang fisik dan teori. Jika dikaji lebih lanjut mengenai kaitan antara objek-objek geometri yang abstrak dengan kesulitan mahasiswa dalam belajar geometri, maka akan muncul dugaan bahwa sesungguhnya terdapat

masalah dalam pembelajaran geometri di sekolah berkaitan dengan pembentukan konsep-konsep yang abstrak. Mempelajari konsep yang abstrak tidak dapat dilakukan hanya dengan transfer informasi saja, tetapi dibutuhkan suatu proses pembentukan konsep melalui serangkaian aktivitas yang dialami langsung oleh mahasiswa. Rangkaian aktivitas pembentukan konsep abstrak tersebut selanjutnya disebut proses abstraksi.

Mempelajari matematika berarti akan mempelajari juga cabang dari matematika yaitu ilmu geometri. Semua yang ada di alam ini merupakan bangun geometri, sehingga matematika melalui cabangnya ilmu geometri mempelajari tentang konsep yang terkandung dalam benda-benda yang ada di alam ini melalui konsep-konsep geometri. Sehingga, pengkajian tentang pembelajaran geometri harus terus dikembangkan sehingga setiap pembelajar geometri mampu menganalisis

benda-benda menjadi suatu konsep geometri dan dapat mengkonstruksi suatu pengetahuan geometri dengan pembuktian-pembuktian formal.

Akan tetapi, pembuktian matematis pada materi geometri akhir-akhir ini menjadi kendala sehingga dirasakan kurang berkembang. Kesulitan menganalisis sifat-sifat geometri yang diwujudkan dalam bentuk teorema-teorema sehingga tercipta sebuah konsep banyak dialami oleh para mahasiswa.

Pembuktian menjadi hal yang serius dalam penentuan kurikulum sekolah di setiap berbagai Negara. Hal inilah yang menjadikan NCTM memasukkan penalaran dan pembuktian ke dalam salah satu standar prosesnya. Artinya dalam setiap pembelajaran seorang guru harus memasukan unsure dalam setiap pembelajaran di kelas.

Dalam pembelajaran tradisional, bukti matematis hanya digunakan sebagai sarana untuk menghilangkan keraguan mahasiswa atas konsep yang diajarkan. Akan tetapi bukti tidak digunakan sebagai sarana meningkatkan kemampuan matematis yang lebih tinggi. Seperti halnya diungkapkan oleh Hana (Christou, 2004), bahwa fungsi bukti dan pembuktian adalah: verifikasi,

penjelas, sistematisasi, penemuan, komunikasi, konstruksi, eksplorasi dan penggabungan. (*verification, explanation, systematization, discovery, communication, construction, exploration, and incorporation*). Verifikasi bukti dan pembuktian dianggap sebagai fungsi yang paling fundamental dalam pembuktian karena keduanya merupakan produk dari proses pengembangan pemikiran matematika yang sangat matang. Verifikasi mengacu pada kebenaran pernyataan sementara penjelasan memberikan wawasan mengapa pernyataan itu benar.

Berdasarkan permasalahan tersebut, peneliti akan mengkaji kajian kesulitan belajar ditinjau dari epistemologi mahasiswa terkait kemampuan pembuktian matematis pada mata kuliah geometri transformasi.

Berdasarkan permasalahan yang telah diuraikan, diperoleh rumusan masalah sebagai berikut.

1. Bagaimana kemampuan pembuktian matematis mahasiswa pada matakuliah geometri transformasi?
2. Apa saja kesulitan belajar mahasiswa ditinjau dari epistemologi mahasiswa terkait materi geometri transformasi?

KAJIAN PUSTAKA

1. Pembuktian Matematis

Menurut Bell (Maarif, 2015) secara umum, sebuah pembuktian adalah sembarang argumen atau presentasi dari bukti-bukti yang meyakinkan seseorang untuk menerima suatu kebenaran.

Pembelajaran bukti dengan metode penemuan (discovery) direkomendasikan oleh Malek & Hadar (2009). Dalam penelitiannya, mereka mengimplementasikan *Transparent Pseudo-Proofs* (TPP) dalam pembelajaran bukti matematis. TPP merupakan pembelajaran bukti melalui pemilihan contoh yang memenuhi pernyataan, sebagai jembatan kognisi untuk memberikan pemahaman lebih jelas (transparan) mengenai bukti yang akan disusun. Meskipun pengambilan contoh bukan bagian dari struktur bukti, hasil penelitian menunjukkan bahwa implementasi TPP menghasilkan kemampuan yang lebih baik pada mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti.

Leikin (2009) mengembangkan *Multiple Proof Tasks* (MPT) dalam pembelajaran bukti. MPT adalah tugas untuk membuktikan suatu pernyataan

matematis melalui berbagai cara yang berbeda.

Cara berbeda yang dapat dipilih antara lain:

1. representasi yang berbeda dari konsep matematika (misalnya membuktikan rumus akar fungsi kuadrat menggunakan representasi grafis, menggunakan representasi simbolis dalam bentuk formal, atau menggunakan representasi simbolis dalam bentuk polinomial),
2. definisi yang berbeda,
3. teorema (sifat) yang berbeda, atau
4. teorema yang berbeda dari subyek yang berbeda.

Menurut Knuth (2002), peranan bukti dalam pembelajaran matematika yaitu:

1. untuk memverifikasi bahwa sebuah pernyataan benar.
2. menjelaskan mengapa sebuah pernyataan dapat dikatakan benar.
3. untuk menemukan atau membuat matematika baru
4. untuk membuat sistematisasi pernyataan dalam Sistem aksiomatik.

2. Jenis-jenis Pembuktian Matematis

Menurut Sumarmo (2004), kemampuan pembuktian matematis dibagi

menjadi dua, yaitu: kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti. Berkaitan dengan kemampuan membaca bukti, Sumarmo (2004) menyatakan bahwa seorang pembaca dikatakan memahami teks matematika misalnya sajian bukti matematika, apabila ia dapat mengemukakan gagasan matematika yang termuat dalam teks tersebut secara lisan atau tulisan dengan bahasanya sendiri. Dengan demikian, ia

tidak hanya sekedar melafalkan uraian suatu bukti, melainkan mengemukakan makna yang terkandung di dalam bukti matematik yang bersangkutan.

Kemampuan mengkonstruksi bukti adalah kemampuan menyusun suatu bukti pernyataan matematik berdasarkan definisi, prinsip, dan teorema, serta menuliskannya dalam bentuk pembuktian lengkap (pembuktian langsung atau tak langsung).

Tabel 1. Kemampuan Pembuktian dan Aspek yang diukur

Dimensi	Aspek yang diukur
Membaca Bukti	<ol style="list-style-type: none"> 1. Kemampuan menerapkan tahapan-tahapan pembuktian pernyataan ke dalam pernyataan lain yang serupa. 2. Kemampuan menggunakan definisi sebagai dasar dalam memberikan alasan pada langkah pembuktian yang benar atau perbaikan simbol, narasi, premis pada tahap/langkah pembuktian yang kurang tepat. 3. Membandingkan dua definisi, kemudian memilih salah satu definisi untuk digunakan dalam pembuktian suatu pernyataan. 4. Kemampuan menelaah suatu pernyataan matematika untuk menentukan kebenaran atau untuk menunjukkan kesalahan pernyataan tersebut dengan menggunakan contoh penyangkalan. 5. Membuat suatu hipotesis (konjektur) berdasarkan pola dan sifat dari beberapa pernyataan dan membuktikan konjektur yang diperoleh tersebut secara deduktif.
Meng-konstruksi Bukti	<ol style="list-style-type: none"> 1. Kemampuan mengorganisasikan dan memanipulasi fakta-fakta, serta mengurutkan langkah-langkah bukti yang diberikan untuk mendapatkan konstruksi butir yang valid. 2. Kemampuan membuat kaitan antara fakta-fakta yang diketahui dalam pernyataan dengan unsur-unsur yang hendak dibuktikan. 3. Kemampuan menggunakan premis, definisi, atau teorema-teorema yang terkait pernyataan untuk membangun suatu pembuktian.

Tabel 2. Rubrik penskoran pembuktian menurut Malcolm (2005)

Indikator/kategori kerja	Respons Siswa
Siswa memerlukan instruksi yang signifikan	<p>Mahasiswa dapat memahami pernyataan umum, namun tidak bisa mengujinya dalam kasus-kasus tertentu.</p> <p>Mahasiswa hanya dapat mengikuti sebagian kecil dari bukti yang diberikan dan tidak dapat memulai untuk mengevaluasi.</p>
Siswa membutuhkan beberapa instruksi	<p>Mahasiswa dapat memahami pernyataan umum dan dapat memberikan contoh untuk mengujinya. Contoh yang diajukan kurang tepat sehingga tidak dapat dijadikan untuk fondasi bukti.</p> <p>Mahasiswa dapat mengikuti bukti yang diberikan. Mahasiswa tidak dapat memulai untuk menjelaskan bagaimana, mengapa atau pada bagian mana kesalahan langkah bukti yang dituliskan.</p>
Siswa membutuhkan perbaikan pekerjaan bukti	<p>Siswa dapat memahami sebuah pernyataan umum dan dapat mengujikannya dengan sebuah contoh yang ada. Siswa dapat menggambarkan kesimpulan yang tepat. Tetapi tidak mencoba untuk membuktikan atau menjustifikasi kesimpulan tersebut secara umum.</p> <p>Siswa dapat mengikuti bukti yang diberikan dan mengoreksi kesalahan bukti yang diberikan. Siswa membuat sebagian penjelasan dari kesalahan sifat-sifat tetapi tidak menjelaskan secara signifikan sifat-sifat tersebut.</p>
Siswa membuktikan sesuai dengan bukti formal	<p>Siswa dapat memahami sebuah pernyataan umum dan dapat mengujikannya dengan sebuah contoh yang ada. Siswa dapat menggambarkan kesimpulan yang tepat. Dan dapat mencoba untuk membuktikan atau menjustifikasi kesimpulan tersebut secara umum.</p> <p>Siswa dapat mengikuti bukti yang diberikan dan mengoreksi kesalahan bukti yang diberikan. Siswa membuat sebagian penjelasan dari kesalahan sifat-sifat dan dapat menjelaskan secara signifikan sifat-sifat tersebut.</p>

Tujuan belajar bukti antara lain:

1. Pemahaman terhadap kemanfaatan bukti matematis sebagai alat untuk menunjukkan bahwa sesuatu itu bernilai benar/salah.
2. Bukti merupakan objek dari belajar matematika.
3. Pemahaman bukti matematis bersesuaian dengan umur dan tingkat daya pikir siswa.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan untuk menganalisis kesulitan belajar mahasiswa, terutama dari segi epistemologi yaitu kesulitan mahasiswa dilihat dari segi materi, baik yang disajikan dalam bentuk bahan ajar ataupun materi yang disampaikan dalam perkuliahan.

Metode penelitian ini adalah metode deskripsi yang bertujuan untuk mendeskripsikan kesulitan belajar ditinjau dari epistemologi mahasiswa terkait pembuktian matematis pada matakuliah geometri transformasi. Subyek penelitian

adalah 9 mahasiswa calon guru matematika Unswagati yang mengontrak mata kuliah geometri transformasi yang terdiri dari 3 mahasiswa dengan pengetahuan awal matematis tinggi, 3 mahasiswa dengan pengetahuan awal matematis sedang dan 3 mahasiswa dengan pengetahuan awal matematis rendah. Pengetahuan awal tersebut berdasarkan perolehan indeks prestasi mahasiswa pada semester sebelumnya. Untuk kesulitan belajar mahasiswa dari segi epistemologi mahasiswa pada materi transformasi menggunakan 5 indikator yaitu konsep, visualisasi, prinsip, memahami masalah, dan pembuktian matematis.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini menghasilkan data kuantitatif dan data kualitatif, yaitu data kemampuan pembuktian matematis dan data kesulitan belajar mahasiswa pada mata kuliah geometri transformasi. Berdasarkan data yang diperoleh, telah disajikan dalam Table 3 berikut.

Tabel 3 Kemampuan Pembuktian Matematis (KPM)

No	Siswa	P1	P2	P3	P4	P5	Skor Total	Kemampuan
1	S1	2	3	2	0	10	19	T
2	S2	3	0	0	0	4	7	R
3	S3	2	3	0	0	5	10	S
4	S4	1	2	2	0	5	10	S
5	S5	3	2	2	2	15	26	T
6	S6	2	0	0	0	2	4	R
7	S7	2	0	0	0	2	4	R
8	S8	2	0	0	2	8	14	T
9	S9	3	0	0	0	6	8	S

Kesulitan belajar siswa dalam memahami konsep-konsep dalam geometri transformasi diatas, maka kesulitan belajar dari segi epistemologi dalam mengerjakan soal pada geometri transformasi dibagi menjadi 5 jenis, hal ini ditinjau dari indikator dalam mengkaji kesulitan belajar yaitu: a. Kesulitan belajar terkait kesulitan dalam menerapkan konsep; b. Kesulitan belajar terkait memvisualisasi objek geometri; c. Kesulitan belajar terkait kesulitan menentukan prinsip; d. Kesulitan belajar terkait memahami masalah dan e. terkait kesulitan dalam pembuktian matematis.

a. Kesulitan Belajar Terkait Memahami dan Menerapkan Konsep

Kesulitan belajar ini merupakan

kesulitan yang dialami siswa dalam memahami dan menerapkan konsep sesuai dengan perintah soal. Contoh kesulitan ini salah satunya siswa tidak memahami konsep, mahasiswa tidak dapat menyebutkan definisi transformasi. Hal ini terjadi pada mahasiswa dengan pengetahuan awal matematis tinggi, sedang maupun rendah.

Berikut adalah salah satu contoh soal dan respon siswa yang mengalami hambatan belajar. Misalnya pada soal berikut: tuliskan definisi dari suatu transformasi pada bidang V.

Kesulitan mahasiswa dengan pengetahuan awal tinggi dideskripsikan sebagai berikut. S1 mengalami kesulitan terhadap konsep, untuk mendefinisikan

transformasi, mahasiswa ini tidak menuliskan domain/kodomain dari suatu fungsi yang disebut transformasi. S5 dapat menuliskan dengan benar dan lengkap definisi dari transformasi. S8 mengalami kesulitan terhadap konsep, untuk mendefinisikan transformasi, mahasiswa ini tidak menuliskan domain/kodomain dari suatu fungsi yang disebut transformasi.

Kesulitan mahasiswa dengan pengetahuan awal sedang dideskripsikan sebagai berikut.

S3 mengalami kesulitan terhadap konsep, tidak dapat mendefinisikan transformasi dengan benar, mahasiswa ini hanya menyebutkan bahwa transformasi merupakan suatu fungsi yang bijektif, tetapi tidak menuliskan domain/kodomain dari fungsi tersebut. S4 dalam mendefinisikan transformasi hanya dengan menyebutkan bahwa transformasi adalah fungsi yang injektif saja. S9 dapat menuliskan definisi transformasi dengan benar dan lengkap.

Kesulitan mahasiswa dengan pengetahuan awal rendah dideskripsikan sebagai berikut.

S2 tidak mengalami kesulitan dalam menuliskan definisi transformasi. S6 dan S7 menuliskan definisi transformasi

tidak lengkap. Kedua mahasiswa tersebut tidak menuliskan domain/kodomain dari fungsi yang merupakan transformasi pada bidang V. Selain itu juga S6 didapati salah dalam menuliskan notasi.

b. Kesulitan Belajar Terkait Memvisualisasikan

Kesulitan belajar terkait memvisualisasi objek geometri. Maksudnya adalah mahasiswa mengalami kesulitan dalam hal menggambarkan garis hasil transformasi. Contoh kesulitan ini diantaranya ketidakmampuan siswa dalam melukis dengan benar dan tepat. Berikut adalah salah satu contoh soal dan respon mahasiswa yang mengalami Kesulitan belajar. Misalnya pada soal nomor 2 yaitu sebagai berikut:

Lukislah garis $g' = M_h(g)$ jika $h = \{(x, y) | y = x + 1\}$ dan $g = \{(x, y) | y = -x\}$.

Kesulitan mahasiswa dengan pengetahuan awal tinggi dideskripsikan sebagai berikut.

S1 mengalami kesulitan memvisualisaikan dengan benar garis g dan h sehingga gambar hasil pencerminan gambar yang dibuat salah. S5 dapat memvisualisasikan sesuai dengan apa yang diketahui dan ditanyakan, tetapi gambar masih dibuat tanpa penggaris. S8 dapat

melukiskan garis hasil pencerminan dengan tepat.

Kesulitan mahasiswa dengan pengetahuan awal sedang dideskripsikan sebagai berikut.

S3 mengalami kesulitan dalam memvisualisasikan garis h sehingga hasil pencerminan yang dilukiskan salah. S4 dalam melukis tidak menggunakan penggaris, tetapi hasil pencerminan yang dilukiskan sudah tepat. S9 tidak dapat melukiskan semua yang diketahui.

Kesulitan mahasiswa dengan pengetahuan awal rendah dideskripsikan sebagai berikut.

S2 dapat melukis hasil pencerminan dengan benar. S6 dan S7 tidak dapat melukiskan semua yang diketahui sehingga hasil pencerminan tidak ada, selain itu, kedua mahasiswa tersebut tidak menggambar koordinat kartesius sebagai langkah awal dalam melukis suatu garis hasil pencerminan.

c. Kesulitan belajar terkait prinsip

Kesulitan belajar ini yaitu kesulitan yang dialami siswa dalam hal menyelesaikan masalah dengan menentukan prinsip-prinsip yang akan digunakan dalam penyelesaian masalah

transformasi. Contoh kesulitan ini yaitu ketidakmampuan siswa dalam menyebutkan sifat-sifat isometri, sehingga tidak dapat member alasan dari pertanyaan-pertanyaan dalam soal. Berikut adalah salah satu contoh soal dan respon siswa yang mengalami kesulitan belajar ini. Misalnya pada soal berikut: Diketahui: T dan S isometri. Tentukan pernyataan-pernyataan di bawah ini Benar atau Salah? Berikan Alasanmu.

- Jika g sebuah garis maka $g' = (TS)(g)$ juga sebuah garis.
- Jika $g \parallel h$ dan $g' = (TS)(g)$, $h' = (TS)(h)$ maka $g' \parallel h'$.
- Jika S adalah pencerminan maka S bersifat involutorik.

Kesulitan mahasiswa dengan pengetahuan awal tinggi dideskripsikan sebagai berikut.

S1 dapat menjawab dengan benar, namun alasan yang diutarakan salah. S5 dapat menjawab dengan benar beserta alasannya dengan tepat. S8 dapat menyebutkan definisi isometri dengan benar, tetapi tidak dapat menjawab pertanyaan terkait dengan prinsip isometri, sehingga alasan yang digunakan tidak benar.

Kesulitan mahasiswa dengan pengetahuan

awal sedang dideskripsikan sebagai berikut.

S3 mengalami kesulitan menuliskan definisi isometric dan memberi alasan yang salah terkait pernyataan-pernyataan yang diberikan. S4 dapat menuliskan alasan dengan tepat tetapi masih terdapat penulisan notasi yang salah. S9 salah menuliskan definisi isometri, memberikan alasan yang salah.

Kesulitan mahasiswa dengan pengetahuan awal rendah dideskripsikan sebagai berikut.

S2 salah menuliskan definisi dan alasan yang diberikan juga salah. S6 dan S7 salah dalam menuliskan definisi dan tidak menyertakan alasan (tidak menjawab).

d. Kesulitan belajar terkait memahami masalah

Kesulitan belajar ini yaitu kesulitan yang dialami siswa dalam hal memahami masalah untuk menyelesaikan masalah dengan menggunakan langkah-langkah penyelesaian dengan menuliskan apa yang diketahui dan ditanyakan dari soal. Contoh kesulitan ini adalah ketidakmampuan mahasiswa dalam menyelesaikan masalah sesuai dengan langkah-langkah penyelesaian. Berikut adalah salah satu contoh soal dan respon

siswa yang mengalami kesulitan belajar ini. Misalnya pada soal berikut: tentukan persamaan garis $g' = M_h(g)$ jika $h = \{(x, y) | y = x + 1\}$ dan $g = \{(x, y) | y = -x\}$.

Kesulitan mahasiswa dengan pengetahuan awal tinggi dideskripsikan sebagai berikut.

S1 mengalami kesulitan menentukan apa yang diketahui dan prosedur penyelesaian masalah masih keliru. S5 dapat memahami masalah, mengetahui apa yang diketahui dan ditanyakan, dapat menyelesaikan masalah sesuai dengan prosedur penyelesaian. S8 dapat memahami masalah dan menyelesaikannya sesuai prosedur.

Kesulitan mahasiswa dengan pengetahuan awal sedang dideskripsikan sebagai berikut.

S3 dapat memahami masalah dan menyelesaikan masalah dengan prosedur yang tepat, tetapi terdapat kesalahan dalam operasi hitung. S4 dapat memahami masalah dan menyelesaikan masalah sesuai prosedur. S9 tidak bisa memahami masalah dan tidak dapat menyelesaikannya.

Kesulitan mahasiswa dengan pengetahuan awal rendah dideskripsikan sebagai berikut.

S2 dapat memahami masalah tetapi

tidak dapat menyelesaikan dengan prosedur yang benar. S6 dan S7 tidak dapat memahami masalah dan tidak menyelesaikannya.

e. Kesulitan dalam pembuktian matematis

Kesulitan belajar ini yaitu kesulitan yang dialami mahasiswa dalam hal mengonstruksi bukt dari soal. Berikut adalah salah satu contoh soal dan respon siswa yang mengalami kesulitan belajar ini. Misalnya pada soal berikut: buktikan bahwa pencerminan pada garis g adalah suatu isometri.

Kesulitan mahasiswa dengan pengetahuan awal tinggi dideskripsikan sebagai berikut.

S1 dapat mengonstruksi bukti dengan benar tetapi terdapat notasi yang masih salah. S5 dapat mengonstruksi bukti dengan benar. S8 dapat mengonstruksi bukti sebagian, pada akhir bagian terdapat kesalahan dalam memberikan alasan.

Kesulitan mahasiswa dengan pengetahuan awal sedang dideskripsikan sebagai berikut.

S3 dan S4 kesulitan untuk mengonstruksi bukti, tidak dapat menggunakan definisi yang sudah ada. S9 kesulitan untuk memulai mengonstruksi

bukti.

Kesulitan mahasiswa dengan pengetahuan awal rendah dideskripsikan sebagai berikut.

S2 tidak dapat menggunakan definisi untuk mengonstruksi bukti. S6 dan S7 memulai mengonstruksi bukti dengan hal yang akan dibuktikan, kesulitan dalam memulai konstruksi bukti dan tidak dapat menggunakan definisi untuk mengonstruksi bukti.

SIMPULAN DAN SARAN

Berikut adalah simpulan-simpulan yang didapatkan dalam penelitian ini. 1) rata-rata kemampuan pembuktian matematis mahasiswa khususnya dalam mengonstruksi bukti sebesar 11,33 (skor maksimal 28) dengan rincian sebagai berikut: untuk mahasiswa dengan pengetahuan awal matematis yang tinggi memperoleh rata-rata sebesar 19,67; mahasiswa dengan pengetahuan awal matematis sedang memperoleh rata-rata sebesar 9,33; dan dengan pengetahuan awal matematis rendah memperoleh rata-rata sebesar 5,00. 2) terdapat 5 macam kesulitan mahasiswa ditinjau dari epistemology terkait mata kuliah geometri transformasi, yaitu a) kesulitan belajar terkait kesulitan dalam menerapkan konsep; b) kesulitan belajar terkait memvisualisasi objek

geometri; c) kesulitan belajar terkait kesulitan menentukan prinsip; d. kesulitan belajar terkait memahami masalah dan e. terkait kesulitan dalam pembuktian matematis. Khusus dalam pembuktian matematis, mahasiswa mengalami kesulitan antara lain: tidak tahu bagaimana memulai konstruksi bukti, tidak dapat menggunakan definisi (konsep) dan prinsip yang sudah diketahui, dan cenderung memulai konstruksi bukti dengan apa yang harus dibuktikan.

Berikut adalah saran-saran dari peneliti.

1. Kemampuan pembuktian matematis mahasiswa masih tergolong rendah terutama untuk mahasiswa dengan pengetahuan awal sedang dan rendah. Maka perlu diterapkan sebuah model pembelajaran yang menuntun mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti.
2. Kesulitan-kesulitan tersebut dapat diatasi dengan membuat bahan ajar yang menekankan pada pentingnya konsep, cara menggambar dan menuntun dalam mengkonstruksi bukti.

DAFTAR PUSTAKA

- Byer, W. 2007. *How Mathematicians Think*. New Jersey: Princeton University Press.
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. 2004. *Proofs Through Exploration In Dynamic Geometry Environments*. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004 Vol 2 pp 215–222.
- Hinze, A. dan Reiss, K. (2004). *Aiso Heinze, Kristina Reiss Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence*. [Online] http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG4/TG4_Heinze_cerme3.pdf diakses pada tanggal 18 Oktober 2015 pukul 23.00.
- Jones, K. dan Rodd, M. (2001). *Geometry and Proof*. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 21(1) March 2001.
- Knuth, E.J. (2002). *Theachers' Conception of Proof in the Context of Secondary School Mathematics*. Journal of Mathematics Teacher Education 5: 61–88, 2002. © 2002 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands
- Leikin, R. 2009. *Multiple Proof Tasks Teacher Practice and Teacher Education*. Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education, 31-35. Conference held

- on May 10-15, 2009 in Taipei, Taiwan.
- Maarif, S. 2015. *Pembelajaran Geometri Berbantuan Cabri 2 Plus (Panduan Praktis Mengembangkan Kemampuan Matematis)*. Bogor: In Media.
- Malcolm Swan dan Jim Ridgway. *Convincing and Proving' Tasks*. [online] https://www.google.co.id/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&cad=rja&uact=8&ved=0CCwQFjABahUKEwi40KTi3YnJAhXLkpQKHSDwBEU&url=http%3A%2F%2Fwww.flaguide.org%2Fextra%2Fdownload%2Fcat%2Fmath%2Fconvincing%2Fconvince.rtf&usg=AFQjCNEK5FIYBotly5_CEXJT8iaZJeqAVA&bvm=bv.107406026,d.dGo.
- Malek, A & Hadar, N.M. 2009. *The Art of Constucting A Transparent P-Proof*. Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Prooving in Mathematics Education, 70-75. Conference held on May 10-15, 2009 in Taipei, Taiwan.
- Mariotti, M.A. (2001). *Introduction To Proof: The Mediation Of A Dynamic Softwareenvironment*. Educational Studies in Mathematics 44: 25–53, 2000. © 2001 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
- Moore, R. C. 1994. *Making the Transition to Formal Proof*. *Educational Studies in Mathematics*, 27, (3), 249-266.
- National Council of Teachers of Mathematics. 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- Reiss, K dan Renkl, A. (2001). *Learning to prove: The idea of heuristic examples*. *ZDM Journal* 2002 Vol. 34 (1).
- Sumarmo, U. 2014. *Advanced Mathematical Thinking dan Habits of Mind Mahasiswa*. Bahan Ajar Matakuliah Kajian dan Isu Pendidikan Matematika Pascasarjana UPI dan STKIP Siliwangi Bandung. Dapat diakses di: <http://utari-sumarmo.dosen.stkipsiliwangi.ac.id/2015/09/makalah-advanced-math-thinking-dan-habit-of-mind/>
- Suryadi, D. 2007. *Model Bahan Ajar dan Kerangka-Kerja Pedagogis Matematika untuk Menumbuhkembangkan Kemampuan Berpikir Matematik Tingkat Tinggi*. Laporan Penelitian: Tersedia di: <http://didi-suryadi.staf.upi.edu/artikel/>
- Tall, D. 1999. *The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some?*